

Titre: Méthodologie de vérification d'un processus adaptatif utilisant la
Title: mesure de non-conformité

Auteur: Paul Labbé
Author:

Date: 2010

Type: Mémoire ou thèse / Dissertation or Thesis

Référence: Labbé, P. (2010). Méthodologie de vérification d'un processus adaptatif utilisant la
Citation: mesure de non-conformité [Thèse de doctorat, École Polytechnique de Montréal].
PolyPublie. <https://publications.polymtl.ca/419/>

 **Document en libre accès dans PolyPublie**
Open Access document in PolyPublie

URL de PolyPublie: <https://publications.polymtl.ca/419/>
PolyPublie URL:

**Directeurs de
recherche:** François Guibault
Advisors:

Programme: Génie informatique
Program:

UNIVERSITÉ DE MONTRÉAL

MÉTHODOLOGIE DE VÉRIFICATION D'UN PROCESSUS ADAPTATIF UTILISANT
LA MESURE DE NON-CONFORMITÉ

PAUL LABBÉ
DÉPARTEMENT DE GÉNIE INFORMATIQUE ET GÉNIE LOGICIEL
ÉCOLE POLYTECHNIQUE DE MONTRÉAL

THÈSE PRÉSENTÉE EN VUE DE L'OBTENTION
DU DIPLÔME DE PHILOSOPHIÆ DOCTOR
(GÉNIE INFORMATIQUE)
NOVEMBRE 2010

UNIVERSITÉ DE MONTRÉAL

ÉCOLE POLYTECHNIQUE DE MONTRÉAL

Cette thèse intitulée :

MÉTHODOLOGIE DE VÉRIFICATION D'UN PROCESSUS ADAPTATIF UTILISANT
LA MESURE DE NON-CONFORMITÉ

présentée par : LABBÉ, Paul

en vue de l'obtention du diplôme de : Philosophiæ Doctor

a été dûment acceptée par le jury d'examen constitué de :

M. ROY, Robert, Ph.D., président.

M. GUIBAUT, François, Ph.D., membre et directeur de recherche.

Mme. CHERIET, Farida, Ph.D., membre.

M. ILLINCA, Adrian, Ph.D., membre externe.

*À oncle Jacques, tante Gaby et mon père,
les voix qui m'inspirent,
À mon garçon, mon petit démon,
À mon amour, qui a fait le vrai travail,
À ma mère, dont l'évaluation est la plus juste...*

REMERCIEMENTS

Je tiens à remercier l’Institut de recherche d’Hydro-Québec et plus particulièrement Henri Pastorel, Anne-Marie Giroux, Robert Magnan, Jonathan Nicolle, Geneviève Gauthier et Maryse Page pour leur soutien lors de la rédaction de cette thèse.

Je suis éternellement reconnaissant envers Julien Dompierre, Marie-Gabrielle Vallet, François Guibault et Jean-Yves Trepanier qui m’ont servi de mentor dans mon apprentissage en adaptation de maillage.

Ce travail n’aurait jamais été achevé sans les efforts incessants de Nathalie.

RÉSUMÉ

Dans le contexte où l'on veut obtenir des résultats fiables d'analyses CFD pour des problèmes d'écoulements internes incompressibles à haut nombre de Reynolds, on s'intéresse à la mise en oeuvre rigoureuse et méthodique d'un processus adaptatif qui contrôle l'erreur d'interpolation pour un problème à un seul scalaire. Deux contributions originales ont été faites lors de la mise en oeuvre de ce processus. La première est une mesure universelle permettant de mesurer la conformité d'un élément du maillage par rapport aux spécifications du maillage données sous forme d'espace métrique. Cette mesure permet d'évaluer la qualité d'un maillage en regard de l'estimateur d'erreur utilisé. La mesure peut donc servir pour optimiser le maillage ou pour comparer des algorithmes d'optimisation en mesurant la conformité des maillages produits par ces algorithmes. La mesure s'applique à tous les types d'éléments et est insensible aux dimensions du domaine.

La seconde contribution est une méthodologie de vérification du processus adaptatif qui utilise des solutions manufacturées afin de vérifier chaque étape du processus. Cette méthodologie mesure l'équirépartition de l'erreur d'approximation en calculant l'écart type de l'erreur maximum sur chaque élément afin de vérifier que le processus contrôle bel et bien l'erreur d'approximation. Un second article présentant cette méthodologie compare un raffinement uniforme, un processus d'adaptation isotrope et un processus d'adaptation anisotrope appliqués à des solutions manufacturées. On montre, pour une solution fortement anisotrope, qu'un maillage de 7000 tétraèdres étirés est aussi précis qu'un maillage de 4 millions de tétraèdres uniformes.

De plus, on présente deux autres contributions originales réalisées durant cette thèse, mais qui n'ont pas fait l'objet de publication dans des revues scientifiques. Il s'agit, dans un premier temps, d'un algorithme récursif de basculement par division bipariétale permettant de trouver la façon optimale de basculer une arête lors de l'optimisation du maillage. Dans un deuxième temps, on présente une façon de visualiser les actions principales que l'estimateur d'erreur veut effectuer sur le maillage.

ABSTRACT

A method is presented that measures the non-conformity of a mesh with respect to a size specification map given in the form of a Riemannian metric. The measure evaluates the difference between the metric tensor of a simplex of the mesh and the metric tensor specified on the size specification map. This measure is universal because it is a unique, dimensionless number which characterizes either a single simplex of a mesh or a whole mesh, both in size and in shape, be it isotropic or anisotropic, coarse or fine, in a small or a big domain, in two or three dimensions. This measure is important because it can compare any two meshes in order to determine unequivocally which of them is better. Analytical and numerical examples illustrate the behavior of this measure.

Also, a verification methodology that can assess the precision and convergence of an anisotropic adaptive process as it applies to control the interpolation error of sample 2D and 3D reaction-diffusion problems is presented. The technique of Manufactured Solution is used to devise problems for which the analytical solution is known. The convergence rate of the Hessian-based error estimator used in this unstructured mesh adaptation method is first evaluated through mesh convergence studies. Two distinct mesh quality measures are then used to illustrate mesh improvement in the course of adaptation. Finally, the overall adaptive process is verified by measuring the convergence rate of the interpolation error as well as measuring how evenly the interpolation error is distributed over all the elements of the adapted meshes. This verification process first demonstrates that each component of the adaptation process converges at a rate predicted by theory, and second how effective anisotropic adaptation is to reduce the number of nodes needed to achieve a prescribed error level. The proposed verification methodology constitutes a quantitative approach to compare mesh adaptation algorithms among them, both in terms of efficiency and quality of the resulting mesh.

Two other contributions are presented that complement the work done in this thesis. The first contribution is a tridimensionnal edge swapping procedure that recursively subdivides the edge swapping problem by finding two parietal pairs of tetraedra of optimal quality. The second contribution is the visualisation of the principal actions that an error estimator wants to perform on a mesh.

TABLE DES MATIÈRES

DÉDICACE	iii
REMERCIEMENTS	iv
RÉSUMÉ	v
ABSTRACT	vi
TABLE DES MATIÈRES	vii
LISTE DES TABLEAUX	x
LISTE DES FIGURES	xi
LISTE DES ANNEXES	xiii
LISTE DES SIGLES ET ABRÉVIATIONS	xiv
CHAPITRE 1 INTRODUCTION	1
1.1 Définitions et concepts de base	3
1.1.1 Géométrie	3
1.1.2 Maillage	4
1.1.3 Solution numérique	5
1.1.4 Erreur d'approximation	6
1.1.5 Erreur d'interpolation	8
1.1.6 Carte de taille	9
1.1.7 Longueur métrique des arêtes	11
1.1.8 Aire métrique des faces et volume métrique des éléments	11
1.1.9 Qualité d'un maillage	11
1.2 Objectifs de recherche	12
1.3 Plan de la thèse	13
CHAPITRE 2 REVUE CRITIQUE DE LA LITTÉRATURE	14
2.1 Estimateur d'erreur	14
2.1.1 Estimateur d'erreur de type Zienkiewicz et Zhu	14
2.1.2 Estimateur d'erreur d'interpolation	16

2.1.3	Estimateur basé sur le résidu	17
2.1.4	Estimateur hiérarchique	17
2.1.5	Carte de taille	18
2.2	Reconstruction	18
2.3	Optimisation de maillage	19
2.3.1	Fonction coût	21
2.3.2	Degrés de liberté	21
2.3.3	Contraintes	21
2.3.4	Algorithme	22
2.4	Synthèse	24
CHAPITRE 3 SYNTHÈSE DE L'ENSEMBLE DU TRAVAIL		26
3.1	Non-conformité	26
3.1.1	Carte de taille	27
3.1.2	Métrie d'un simplexe	28
3.1.3	Tenseur métrique cible moyen	29
3.1.4	Mesure de non-conformité	30
3.1.5	Extension aux éléments non-simpliciaux	33
3.1.6	Une mesure générale	33
3.1.7	Non-conformité du maillage	36
3.1.8	Exemples numériques	38
3.1.9	Cas test anisotrope	39
3.2	Vérification	43
3.2.1	Equirépartition de l'erreur d'approximation	43
3.2.2	Solutions manufacturées	43
3.2.3	Vérification de la reconstruction du Hessien	44
3.2.4	Cartes de tailles et stratégies d'adaptations	44
3.2.5	Modification de maillage	46
3.2.6	Vérification du calcul du maillage adapté à la carte de taille	47
3.2.7	Vérification de l'équirépartition de l'erreur d'approximation	47
CHAPITRE 4 RÉSULTATS COMPLÉMENTAIRES		55
4.1	Visualisation des actions à effectuer	55
4.1.1	Diffuseur conique	56
4.1.2	Modélisation CFD	57
4.1.3	Estimation de l'erreur	58
4.1.4	Métrie M_K d'un élément du maillage	60

4.1.5	Visualisation des actions	61
4.2	Basculement des arêtes	63
4.2.1	Problème d'Euler et le nombre de Catalan	63
4.2.2	Qualité des reconnections	66
4.2.3	État de l'art	67
4.2.4	Algorithme	67
CHAPITRE 5	DISCUSSION GÉNÉRALE ET RETOMBÉES	72
5.1	Retombées de la non-conformité	73
5.2	Retombées de la vérification du processus adaptatif	73
5.3	Retombées de la stratégie de visualisation	73
5.4	Retombées de l'algorithme de basculement	74
5.5	Limitations des solutions proposées	74
CHAPITRE 6	CONCLUSION	76
6.1	Perspectives	77
Références	79
ANNEXES	88

LISTE DES TABLEAUX

Tableau 3.1	Indicateurs de qualité évalués dans la métrique spécifiée par l'équation 3.32 pour le maillage illustré à la figure 3.5(a).	39
Tableau 3.2	Indicateurs de qualité évalués dans la métrique spécifiée par l'équation 3.33 pour le maillage illustré à la figure 3.6.	41
Tableau 3.3	Caractéristiques des maillages de la figure 3.11.	49
Tableau 3.4	Caractéristiques des maillages de la figure 3.14.	52

LISTE DES FIGURES

Figure 1.1	Méthodologie de résolution d'un problème de simulation à l'aide de la CFD.	2
Figure 1.2	Diagramme d'activité du processus adaptatif avec décomposition selon les rôles.	2
Figure 1.3	Diagramme de classe du modèle topologique de la géométrie.	5
Figure 1.4	Approximations de $f(x) = x^4$ obtenues en minimisant la norme L^2 et la norme L^∞	7
Figure 1.5	Erreur des approximations de $f(x) = x^4$ obtenues en minimisant la norme L^2 et la norme L^∞	8
Figure 3.1	Ellipses associées aux tenseurs métriques de certains triangles.	29
Figure 3.2	Premier terme des résidus $R_s(x, 0)$ et $R_b(x, 0)$ (Eqs. 3.10 et 3.11) en fonction du $\log_{10}(x)$	31
Figure 3.3	Isolignes du $\log_{10}(\mathcal{E}_K)$ avec quelques cartes de tailles variées.	32
Figure 3.4	Si le maillage cible est le maillage du milieu, le coefficient de non-conformité du premier et du dernier maillage sont équivalents.	37
Figure 3.5	Maillages obtenues avec la métrique isotrope donnée à l'équation 3.32.	40
Figure 3.6	Maillages obtenus avec la métrique anisotrope donnée à l'équation 3.33.	42
Figure 3.7	Isocontours de la solution des cas tests de réaction-diffusion.	45
Figure 3.8	Convergence du Hessien reconstruit pour le cas test du problème de réaction-diffusion.	45
Figure 3.9	Réduction de \mathcal{E}_T et stabilisation du nombre d'éléments durant le processus d'adaptation menant au maillage de la figure 3.10.	48
Figure 3.10	Adaptation du maillage pour le problème donné à l'équation 3.35 (coloré par le coefficient de non-conformité).	48
Figure 3.11	Résultats pour le cas test de réaction-diffusion avec $k = 10$ dans un carré.	50
Figure 3.12	Histogrammes de l'erreur d'interpolation élémentaire adimensionnalisée en norme L^∞ pour le cas test de réaction-diffusion avec $k = 10$	52
Figure 3.13	Écart type du cas test de réaction-diffusion avec $k = 10$	52
Figure 3.14	Résultats pour le cas test de réaction-diffusion avec $k = 100$ dans un cube unitaire.	53

Figure 3.15	Histogrammes de l'erreur d'interpolation en norme L^∞ adimensionnée pour le cas test de réaction-diffusion avec $k = 100$ dans un cube unitaire.	53
Figure 4.1	Géométrie du diffuseur conique (de Clausen <i>et al.</i> (1993)).	56
Figure 4.2	Composantes longitudinale et rotationnelle de la vitesse à trois stations	59
Figure 4.3	Viscosité turbulente sur le maillage grossier	60
Figure 4.4	Ellipses de la métrique de la pression sur le maillage grossier.	61
Figure 4.5	Ellipses représentant M_k sur un plan de coupe du maillage grossier . .	62
Figure 4.6	Modifications principales à faire sur le maillage selon l'indicateur basé sur la vitesse	64
Figure 4.7	Modifications principales à faire sur le maillage selon l'indicateur basé sur la pression	64
Figure 4.8	Façons possibles de reconnecter un hexagone	65
Figure 4.9	Triangles frontières des reconnections possibles d'un hexagone	68

LISTE DES ANNEXES

Annexe A	A UNIVERSAL MEASURE OF THE CONFORMITY OF A MESH WITH RESPECT TO AN ANISOTROPIC METRIC FIELD	88
Annexe B	VERIFICATION OF A THREE-DIMENSIONAL ANISOTROPIC ADAP- TATION METHOD BY LOCAL MESH MODIFICATION	110

LISTE DES SIGLES ET ABRÉVIATIONS

$\rho, \mu, \beta', \alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2,$	
$\sigma_{\omega 1}, \sigma_{\omega 2}, \sigma_{k 1}, \sigma_{k 2}$	Constantes du modèle de turbulence.
\mathcal{T}	Le maillage.
K	Un élément du maillage.
M_K	La métrique qui rend K unitaire et régulier.
u	La solution exacte d'une ÉDP.
u_h	Une approximation de la solution d'une ÉDP.
$\pi_h(u)$	L'interpolation de u sur \mathcal{T} .
$H(u)$	Le Hessien de u .
$\tilde{H}(u)$	La reconstruction du Hessien de u .
M_s	La métrique cible.
\mathcal{E}_K	La non conformité de l'élément K .

CHAPITRE 1

INTRODUCTION

Les travaux de cette thèse ont pour contexte général l’installation d’outils adaptatifs afin d’obtenir des résultats numériques fiables dans le contexte d’écoulements dans les turbines hydrauliques. Il s’agit d’écoulements internes incompressibles à haut nombre de Reynolds dû au diamètre important des machines hydrauliques. Par exemple, lors de la modification de turbines existantes, on cherche à optimiser la forme des pales de la turbine de façon à maximiser le rendement de la turbine. Et pour optimiser la forme des pales, on doit déterminer les forces hydrauliques qui s’exercent sur les pales en calculant l’écoulement dans la turbine. Le calcul de l’écoulement dans la turbine permet de façon générale d’analyser les performances de la turbine.

La CFD offre une méthodologie permettant d’approximer numériquement la solution des équations qui entrent en jeu pour décrire l’écoulement dans la turbine. La précision des simulations CFD dépend de la qualité et de la densité du maillage. Les méthodes d’adaptation de maillage permettent d’assurer la fiabilité des analyses en contrôlant la précision et la robustesse de l’approximation numérique.

Le processus de simulation numérique traditionnel appliqué à la mécanique des fluides décompose le problème en quatre disciplines. Le processus d’analyse numérique standard va de gauche à droite sur la figure 1.1. Le **modeleur géométrique** permet de construire la géométrie du domaine de calcul. Le **mailleur** prend ce modèle géométrique et produit en sortie un maillage éléments finis, qui est une discrétisation du modèle géométrique. Le **résolveur** a en entrée un maillage et approxime la solution d’ÉDP à l’aide d’une méthode numérique appropriée et produit une solution numérique sur le maillage. L’**analyseur** agit en post-traitement et permet de calculer les quantités d’ingénierie appropriées à partir de la solution numérique et aussi d’explorer cette solution afin de comprendre plus finement certains phénomènes selon les besoins de l’usager.

L’adaptation de maillage est un processus de rétroaction de la solution sur le maillage afin d’ajuster la densité du maillage pour bien résoudre les détails de la solution. Pour ce faire, on introduit un nouveau module, l’**adapteur** qui construit un nouveau maillage à partir d’un maillage précédent et d’une solution. Tel qu’illustré à la figure 1.2, ce module se décompose à son tour en deux composantes : l’estimateur d’erreur et le remailleur. L’estimateur d’erreur analyse la solution et donne des recommandations pour la reconstruction du maillage adapté. Le remailleur prend ces recommandations et calcule un nouveau maillage adapté.

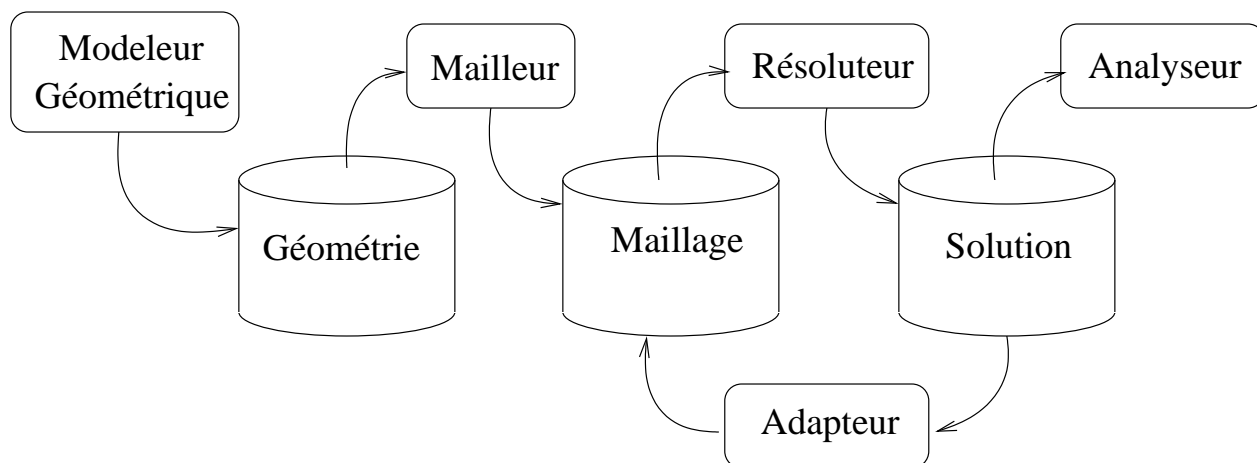


Figure 1.1 Méthodologie de résolution d'un problème de simulation à l'aide de la CFD.

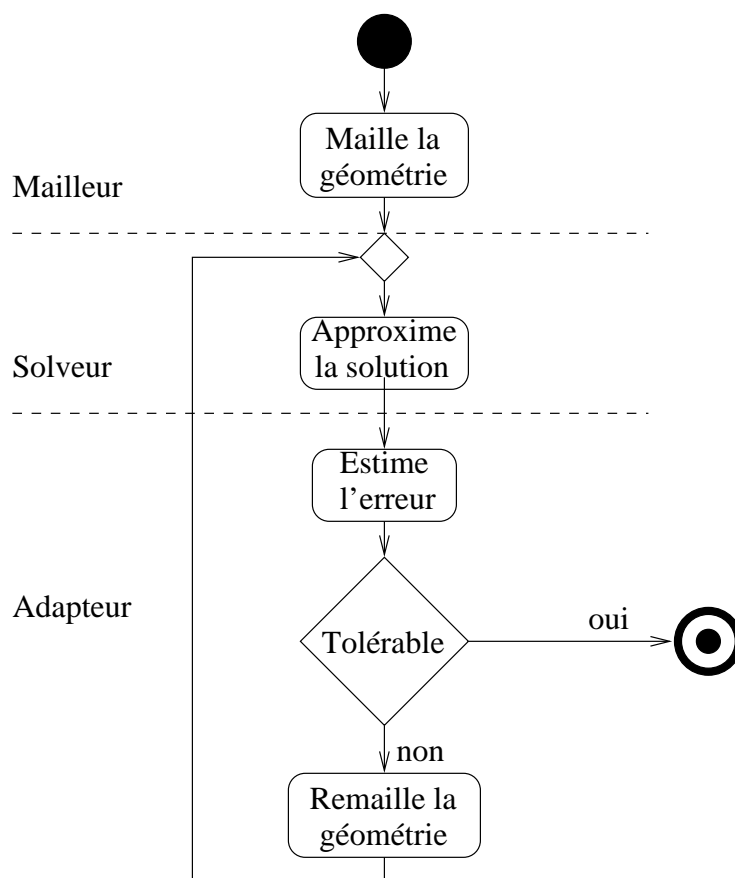


Figure 1.2 Diagramme d'activité du processus adaptatif avec décomposition selon les rôles.

L’adaptativité fait intervenir toutes ces disciplines puisqu’on modifie le maillage basé sur une analyse de la solution numérique tout en continuant de respecter la géométrie, notamment la frontière du domaine de calcul. Les sections suivantes présentent donc avec plus de détails les concepts énoncés ci-haut.

1.1 Définitions et concepts de base

On présente ici les concepts qui sont utilisés dans la thèse. On expose donc les bases nécessaires pour la compréhension de la géométrie, du maillage, de la solution numérique, de l’erreur de cette solution ainsi que les concepts de qualité et d’espace métrique.

1.1.1 Géométrie

Soit un domaine de calcul Ω qui est approximé par une représentation frontière Ω_h . On définit la géométrie de ce domaine de calcul comme une variété de dimension 3 bornée par des variétés de dimension 2 telle que décrit dans le standard STEP et illustrée par le diagramme UML présentée à la figure 1.3. Ce modèle peut non seulement représenter une 3-variété, mais aussi un raffinement de cette variété qui aurait fait apparaître une face interne permettant de scinder la 3-variété initiale en deux 3-variétés ayant une face commune. Cette représentation facilite grandement la génération de maillage en permettant l’approximation de variables sur l’ensemble de la 3-variété de départ de façon continue à travers la face ayant servi à couper le modèle en deux. Un exemple concret illustrant l’intérêt d’un tel découpage nous est fourni par le problème couplé en thermofluide où la température est définie à la fois dans un domaine solide et aussi dans un domaine liquide. Dans ce cas, la 3-variété de départ est l’union des domaines solide et liquide. Cette 3-variété est partitionnée par la face entre le domaine solide et le domaine liquide en deux 3-variétés. Dans le cas où la même face partitionne les deux 3-variétés, on peut générer des maillages pour le domaine solide et le domaine liquide qui sont continus au travers de l’interface, ce qui fait que le maillage utilisé pour approximer la température sera le maillage de la 3-variété de départ. Dans le diagramme de la figure 1.3, ce qui rend cette représentation possible est le fait que la face frontière *utilise* une face au lieu de *posséder* la face. Dans ce cas, cette même face peut aussi borner un deuxième volume. Cette notion de partage des entités topologiques est à la base de la représentation géométrique utilisée pour la représentation des domaines de calcul. Un mailleur capable de discrétiser cette représentation a été présenté par Labbé *et al.* (2001), Labbé *et al.* (2000) et Labbé *et al.* (2002).

Dans un contexte industriel, les supports géométriques des frontières sont des NURBS telles que décrites dans Piegl et Tiller (1995). La projection sur les courbes et les surfaces

se fait à l'aide des algorithmes décrits dans ce document. Il s'agit d'une méthode itérative qui minimise la distance entre le point à projeter et le point projeté sur la géométrie. Cette méthode a besoin des dérivées d'ordre 0, 1 et 2, ce qui exige une représentation continue des frontières.

1.1.2 Maillage

Tel que décrit dans Frey et George (1999), on approxime le domaine Ω_h par un maillage \mathcal{T}_h composé d'un nombre fini d'éléments K tel que l'union des éléments recouvre le domaine Ω_h . Pour décrire la topologie du maillage, on utilise les termes élément, face, arête et sommet. Dans cette thèse, on s'intéresse aux maillages conformes qui préservent la variété Ω_h . Ainsi, les faces internes du maillage partagent exactement deux éléments de maillage, et les faces du maillage qui bornent un seul élément de maillage reposent sur la frontière du domaine.

Dans le cas où le maillage est composé d'éléments de type Lagrange, on peut interpoler les coordonnées d'espace sur un élément K de la façon suivante :

$$\vec{X}_K(\vec{r}) = \sum_{i=0}^{NK} \vec{X}_{i,K} L^i(\vec{r}) \quad (1.1)$$

où NK est le nombre de noeuds dans l'élément K , $\vec{X}_{i,K}$ sont les coordonnées du noeud i de l'élément K et L^i sont les fonctions de base de l'interpolant de Lagrange de l'élément K . On utilise les interpolants de Dhatt et Touzot (1981) ainsi que les règles d'intégrations qui s'y trouvent.

Pour ce qui est du maillage du domaine, bien que l'utilisation de maillages d'hexaèdres est prépondérante dans le domaine des turbines hydrauliques, il faut être capable de travailler avec des maillages multiblocs, des maillages non structurés et/ou des maillages hybrides. On réutilise les définitions suivantes tirées de Frey et George (1999).

Définition 1.1 *La connectivité d'un maillage définit le type des connexions entre ses sommets.*

Définition 1.2 *Un maillage est dit structuré si sa connectivité est de type différence finie.*

Définition 1.3 *Un maillage est dit non structuré si sa connectivité est quelconque.*

On ajoutera qu'un maillage est *monobloc* quand il contient un seul bloc structuré, i.e. dans lequel les sommets du maillage peuvent être indexés par $\vec{X}(i, j, k)$ en trois dimensions. Un maillage est *multiblocs* quand il est composé de plusieurs blocs structurés. Un maillage

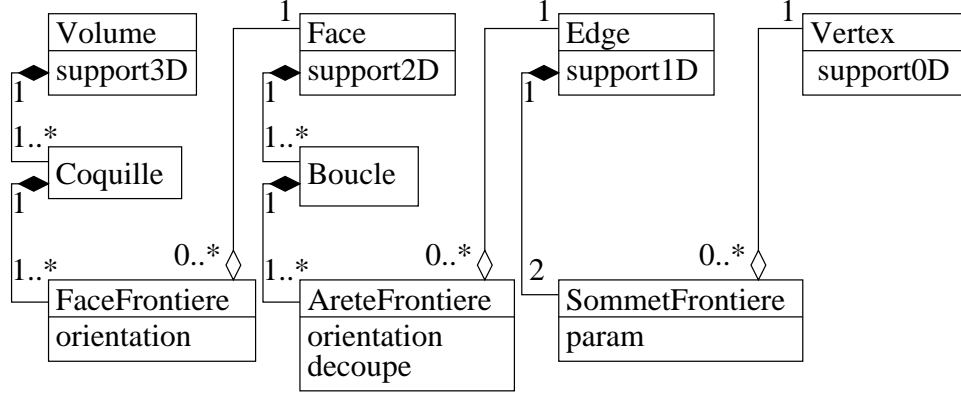


Figure 1.3 Diagramme de classe du modèle topologique de la géométrie.

multiblocs est *conforme* quand les sommets sur les frontières des blocs se superposent exactement aux sommets frontières des autres blocs de façon à préserver la variété du domaine de calcul. Finalement, on aura une définition divergente de Frey et George (1999) en ce qui a trait aux maillages hybrides. On utilisera plutôt la définition qui prévaut en CFD où un maillage est *hybride* s'il contient à la fois une couche d'éléments extrudés près des parois solides et un coeur composé d'un maillage non structuré. Ces maillages sont utilisés pour représenter les phénomènes de couche limite, car ils aident à modéliser la turbulence près des parois solides.

1.1.3 Solution numérique

Soit $u(\vec{x})$ la solution exacte d'une équation aux dérivées partielles définie sur le domaine Ω_h . La méthode des éléments finis permet d'approximer la solution exacte $u_h \approx u$ sur le maillage \mathcal{T}_h . Pour ce faire, on définit un interpolant pour u_h qui s'écrit sur l'élément K :

$$\vec{u}_K(\vec{s}) = \sum_{i=0}^{NUK} \vec{U}_{i,K} N^i(\vec{s}) \quad (1.2)$$

où NUK est le nombre de noeuds de l'interpolant élémentaire de u_K sur K , $\vec{U}_{i,K}$ sont les valeurs nodales i de u_K et N^i sont les fonctions de base de l'interpolant élémentaire de u_K .

La méthode des éléments finis permet de calculer les valeurs U_i étant donné le maillage \mathcal{T}_h . La méthode des volumes finis, quant à elle, calcule une valeur moyenne sur chaque élément desquels on reconstruit les U_i . Ceci est souvent fait à l'interne par les logiciels volumes finis eux-mêmes.

Dans ce qui suit, on s'intéresse plus particulièrement aux interpolants appelés isopa-

ramétriques par Dhatt et Touzot (1981). Dans ce cas, non seulement $\vec{s} = \vec{r}$, mais en plus, $N^i = L^i$.

1.1.4 Erreur d'approximation

On définit l'erreur d'approximation en norme L^p comme étant

$$\|e_A(\vec{x})\|_{L^p} = \|u(\vec{x}) - u_h(\vec{x})\|_{L^p} \quad (1.3)$$

avec $1 \leq p \leq \infty$. Afin de comprendre l'influence de p , on présente l'analyse suivante tirée de Davis (1963) qui approxime la fonction $f(x) = x^4$ sur l'intervalle $[0, 1]$ à l'aide de la ligne droite $a_0 + a_1x$. La meilleure approximation en norme L^2 est noté y_2 et est définie comme étant celle qui minimise

$$y_2 = \min_{a_0, a_1} \int_{x=0}^1 (x^4 - a_0 - a_1x)^2 dx \quad (1.4)$$

$$= -1/5 + 4x/5 \quad (1.5)$$

où a_0 et a_1 sont les coefficients de la droite et l'opérateur $\min_x f(x)$ pose $\partial f / \partial x = 0$. Par ailleurs, la meilleure approximation L^∞ est notée y_∞ et elle est définie comme étant :

$$y_\infty = \min_{a_0, a_1} \max_{0 \leq x \leq 1} |x^4 - a_0 - a_1x| \quad (1.6)$$

$$= -\frac{3}{16} \sqrt[3]{2} + x \quad (1.7)$$

On utilise les théories de Tschebyscheff pour trouver les approximations en norme L^∞ . En effet, l'approximation de Tschebyscheff de degré n de $f(x)$ généralise l'approximation optimale en norme L^∞ avec un polynôme de degré n . L'approximation de Tschebyscheff de degré n de $f(x)$ s'obtient en trouvant les a_i de façon à avoir $\min_{a_0, \dots, a_n} \max_{a \leq x \leq b} |f(x) - (a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n)|$. Par la suite, le théorème d'équioscillation de Tschebyscheff s'exprime de la façon suivante.

Théorème 1.4 Soit $f(x) \in C[a, b]$ et soit $p(x)$ la meilleur approximation uniforme de f de degré n . Soit $E_n = \max_{a \leq x \leq b} |f(x) - p(x)|$ et $e(x) = f(x) - p(x)$. Il y a au moins $n + 2$ points $a \leq x_1 < x_2 < \dots < x_n + 2 \leq b$ où $e(x)$ prend les valeurs $\pm E_n$ en alternant de signe.

À la figure 1.4, on compare y_2 et y_∞ . On voit en effet que $\pm E_n$ est atteint en $x = 0$, $x = 1$ et en $x = \sqrt[3]{1/4}$. En ces points, $E_n = \pm \frac{3}{16} \sqrt[3]{2}$.

On trace à la figure 1.5 l'écart entre ces approximations et la fonction $f(x)$. Sur cette

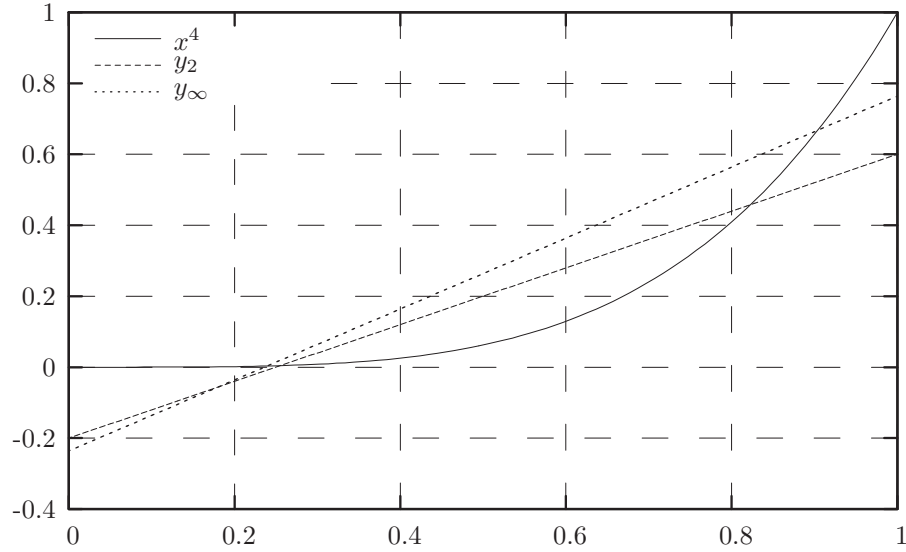


Figure 1.4 Approximations de $f(x) = x^4$ obtenues en minimisant la norme L^2 et la norme L^∞ .

figure, on voit que l'écart de l'approximation y_2 est supérieur en $x = 1$ alors que l'approximation y_∞ s'écarte globalement plus de $f(x)$ que l'approximation y_2 .

Cet exemple montre que le choix de la norme influence la solution optimale obtenue. Par ailleurs, on voit qu'il n'y a pas qu'une seule solution optimale.

En général, on ne sait pas calculer exactement l'erreur d'approximation, puisqu'on ne dispose pas de $u(\vec{x})$, la solution exacte du problème. Diverses techniques sont possibles pour estimer l'erreur. Une de ces techniques consiste à utiliser le lemme de Céa qui permet de borner l'erreur d'approximation par l'erreur d'interpolation. Le lemme de Céa indique en effet qu'il n'y aura pas de solution dans l'espace de solutions qui sera plus près de la solution exacte que la solution trouvée par la méthode élément fini. Ceci s'applique notamment à l'interpolation de u sur le maillage : l'erreur d'interpolation majore donc l'erreur d'approximation. On peut donc conclure que, si l'on contrôle l'erreur d'interpolation, on contrôle l'erreur d'approximation.

Le lemme de Céa, tiré de Frey et George (1999), s'exprime comme suit :

$$\|u - u_h\| \leq C \inf_{v_h \in \mathcal{V}_h} \|u - v_h\| \quad (1.8)$$

où \mathcal{V}_h est l'espace vectoriel qui contient u_h . Ce lemme montre que l'approximation u_h sera au moins plus près de la solution exacte que n'importe quelle autre solution de l'espace des solutions possibles. Notamment, on peut remplacer v_h par l'interpolation $\Pi_h u$. C'est donc

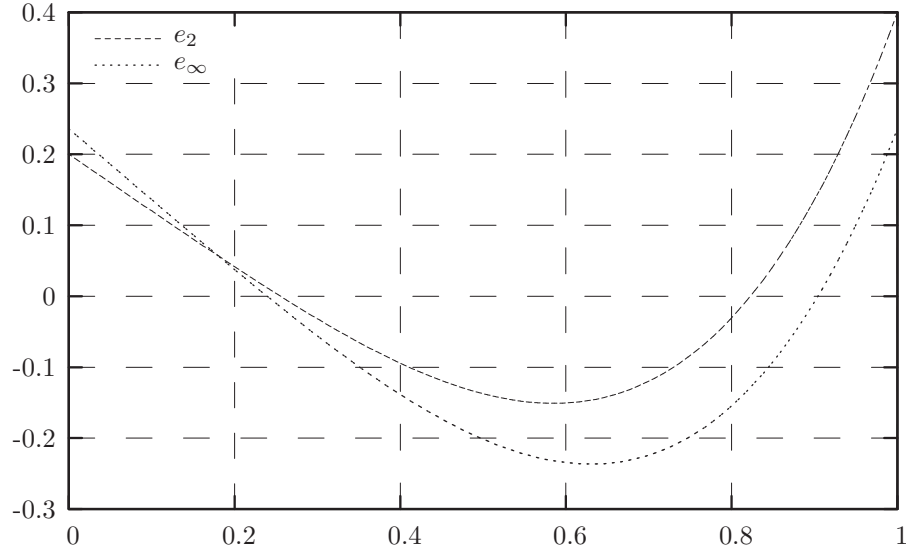


Figure 1.5 Erreur des approximations de $f(x) = x^4$ obtenues en minimisant la norme L^2 et la norme L^∞ .

dire que l'approximation u_h sera plus près de la solution que ne le sera l'interpolation $\Pi_h u$. On a donc :

$$\|u - u_h\| \leq C \|u - \Pi_h u\| \quad (1.9)$$

1.1.5 Erreur d'interpolation

L'interpolation de u sur le maillage \mathcal{T}_h est donnée par

$$\Pi_h u(\vec{s}) = \sum_{i=0}^{N_U K} \vec{u}(\vec{X}_{i,K}) N^i(\vec{s}) \quad (1.10)$$

où $u(\vec{X}_{i,K})$ est l'interpolation de u aux sommets du maillage. L'erreur d'interpolation est alors donnée par :

$$\|e_\Pi u(\vec{x})\| = \|u - \Pi_h u(\vec{x})\| \quad (1.11)$$

Cette erreur est à son tour bornée par le Hessian dans le cas d'éléments linéaires. On a alors que :

$$|u - \Pi_h u(\vec{x})|_{m,K} \leq C \frac{h_K^{k+1}}{\rho_K^m} |u|_{k+1,K} \quad (1.12)$$

où $m = 1$ pour les laplaciens, $k = 1$ est le degré de l'interpolant, h_K est le diamètre de l'élément K , ρ_K est le rayon du cercle inscrit dans K .

1.1.6 Carte de taille

La carte de taille, ou encore, **fonction de maille**, contient les spécifications en taille et en orientation d'un maillage. La carte de taille est donnée sous forme d'espace métrique interpolé sur un maillage telle que définie dans Frey et George (1999). Il s'agit donc de tenseurs symétriques définis positifs qui sont mémorisés aux sommets du maillage et qui sont donnés par :

$$M_S = \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{12} & m_{22} \end{pmatrix} \text{ en 2D, et } M_S = \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} \\ m_{12} & m_{22} & m_{23} \\ m_{13} & m_{23} & m_{33} \end{pmatrix} \text{ en 3D.} \quad (1.13)$$

Ces tenseurs donnent la taille et l'orientation des éléments à construire.

Les tenseurs symétriques définis positifs peuvent se décomposer en matrice de rotation et en matrice d'étirement à l'aide de la relation suivante :

$$M = R^{-1}(\theta) \Lambda R(\theta) \quad (1.14)$$

où la matrice Λ est la matrice diagonale des valeurs propres de M , c'est-à-dire que $\Lambda = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$. On peut donc prendre les valeurs propres λ_i comme étant la longueur des axes de l'ellipse. La matrice $R(\theta)$ définit ensuite la rotation à appliquer à l'ellipse afin de l'orienter dans l'espace. Ainsi, si \vec{X}_e est une matrice qui contient les coordonnées des sommets d'une sphère unitaire centrée à l'origine, alors $R(\theta)\Lambda\vec{X}_e$ tracera une ellipse qui représente comment la métrique M contracte l'espace. Par ailleurs, il est parfois plus intéressant de visualiser l'ensemble des points équidistants par rapport au lieu de définition de la métrique. On cherche alors à visualiser \vec{X}_e tel que $\vec{X}_e^t M \vec{X}_e = 1$. Ces points sont en fait la déformation de la sphère définie précédemment. On remplace donc $\vec{X}_e = J\vec{X}_c$. On obtient $\vec{X}_c^t J^t R^{-1}(\theta) \Lambda R(\theta) J \vec{X}_c = 1$. Ceci montre que $J^t R^{-1}(\theta) \Lambda R(\theta) J = I$. En effet, $\vec{X}_c^t \vec{X}_c = 1$ puisque \vec{X}_c est une sphère unitaire. On voit donc que $J = R^t(1/\sqrt{\lambda_i})$. En somme,

$$R^t(1/\sqrt{\lambda_i}) \vec{X}_c \quad (1.15)$$

trace l'ellipse dont tous les points sont équidistants de l'origine dans la métrique M .

Formellement, un espace métrique est un espace dans lequel la notion de distance entre les éléments de l'espace est définie. La mesure de cette distance est la métrique de cet espace. Pour bien comprendre cette notion, on présente la notion de métrique pour un espace cartésien, un espace euclidien et un espace riemannien.

Espace cartésien

Dans le cas de l'espace cartésien possédant un système de coordonnées orthonormal, on mesure la distance entre le point A et le point B par le produit scalaire

$$d(\vec{A}, \vec{B}) = \sqrt{\Delta \vec{X}^t \Delta \vec{X}} \quad (1.16)$$

où $\Delta \vec{X} = \vec{B} - \vec{A}$.

Espace euclidien

On peut généraliser la notion précédente aux systèmes de coordonnées qui ne sont pas orthonormaux en considérant les transformations linéaires de l'espace cartésien. Si on dispose d'une transformation $\vec{X}(\vec{r})$, alors on peut prendre deux points de \vec{r} et mesurer la distance, dans l'espace \vec{X} , entre ces deux points en notant que

$$\Delta \vec{X}(\vec{r}) = J_{\vec{r} \rightarrow \vec{x}} \Delta \vec{r} \quad (1.17)$$

où $J_{\vec{r} \rightarrow \vec{x}}$ est le Jacobien de la transformation qui transforme un point de \vec{r} et un point de \vec{X} . La distance dans \vec{X} est alors donnée par :

$$d = \sqrt{\Delta \vec{r}^t J_{\vec{r} \rightarrow \vec{x}}^t J_{\vec{r} \rightarrow \vec{x}} \Delta \vec{r}} \quad (1.18)$$

$$= \sqrt{\Delta \vec{r}^t M_{\vec{r} \rightarrow \vec{x}} \Delta \vec{r}} \quad (1.19)$$

où $M_{\vec{r} \rightarrow \vec{x}}$ est un tenseur symétrique défini positif dans le cas où la transformation est bijective. On appelle $M_{\vec{r} \rightarrow \vec{x}}$ la métrique de la transformation de \vec{r} vers \vec{X} , puisqu'elle permet de changer la notion de distance entre les points de \vec{r} de façon à ce que cette distance corresponde à la distance dans un autre espace, l'espace \vec{X} .

Métrique riemannienne

Riemann a étendu la notion précédente aux transformations qui varient en tous points de l'espace. Dans ce cas, le jacobien de la transformation varie lui aussi en tout point de l'espace. La métrique qui sert au calcul des distances doit respecter certaines propriétés, dont l'inégalité triangulaire. La conséquence de ceci est que la distance entre deux points doit se calculer le long du parcours le plus court entre ces deux points. Ce parcours est la géodésique qui suit le chemin de moindre courbure entre les deux points. Ce chemin peut être très difficile à déterminer.

1.1.7 Longueur métrique des arêtes

Dans le domaine de l'adaptivité, on parle souvent de la longueur métrique des arêtes du maillage. Quand la métrique varie en tout point de l'espace, il faut utiliser l'intégrale suivante afin de calculer cette longueur :

$$\ell_M(\gamma) = \int_0^1 \sqrt{\gamma'(t)^T M_S(\gamma(t)) \gamma'(t)} dt \quad (1.20)$$

où $\gamma'(t) = P_2 - P_1 = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)^T$ et $M(\gamma(t))$ est la métrique au point $\gamma(t)$ de l'espace. Quand la métrique est constante, le calcul de la longueur se réduit à :

$$l_{AB} = \sqrt{\vec{AB}^T M_S \vec{AB}}. \quad (1.21)$$

Notez que si M_S est la matrice identité, alors la longueur dans la métrique, $\ell_M(\gamma)$, est simplement la longueur euclidienne $\ell_E(\gamma)$.

Cette longueur n'est pas la distance formelle entre les sommets de l'arête dans l'espace métrique. En effet, cette distance ne suit pas la géodésique reliant les deux sommets. Dans le cas de l'adaptivité, la longueur métrique correspond à la longueur du segment droit reliant les sommets de l'arête. Ce trajet n'est pas le chemin le plus court entre les deux sommets dans le cas général, mais correspond plutôt à un parcours curviligne entre les deux sommets.

1.1.8 Aire métrique des faces et volume métrique des éléments

On peut aussi calculer le volume métrique des éléments ainsi que la surface métrique des éléments à l'aide des équations

$$V_m = \int_{\Omega} \det(M_S) dK \quad (1.22)$$

$$A_m = \int_{d\Omega} \det(M_S) dK \quad (1.23)$$

où V_m est le *volume métrique* de K et A_m est l'*aire métrique* des faces frontières de K . Or, les frontières de K sont des surfaces géodésiques possiblement tordues, ce qui fait que K est difforme. Les mesures V_m et A_m sont erronées si on ne tient pas compte de la nature géodésique des frontières.

1.1.9 Qualité d'un maillage

Dompiere *et al.* (2005) donne une définition formelle des critères de formes.

Définition 1.5 *Un critère de forme simplicial est une fonction continue qui évalue la forme d'un simplexe et qui est invariant par translation, rotation, réflexion et homothétie du simplexe. Il est dit valide s'il est maximal uniquement pour le simplexe régulier et s'il est minimal pour tous les simplexes dégénérés. Pour faciliter les comparaisons, les critères de forme simpliciaux valides sont normalisés dans l'intervalle $[0, 1]$.*

Par ailleurs, il montre que les critères de formes usuels sont équivalents entre eux. Cela dit, le critère de forme η est rapporté ici dû à sa régularité :

$$\eta = \frac{(\prod_{i=1}^d \lambda_i)^{1/d}}{\frac{1}{d} \sum_{i=1}^d \lambda_i} \quad (1.24)$$

où d est la dimension de l'espace et λ_i sont les valeurs propres de la métrique de la transformation qui transforme l'élément K dans un élément régulier, c'est-à-dire équilatéral et unitaire.

Dans le cas des maillages adaptés, il faut mesurer la forme des éléments dans l'espace métrique. La façon traditionnelle de tenir compte de l'espace métrique est de mesurer le volume et l'aire des faces frontières des éléments à l'aide de la formule de Héron qui lie l'aire d'un triangle à son demipérimètre. Ceci permet de réutiliser le calcul de la longueur métrique des arêtes. Malheureusement, la mesure de la longueur métrique n'est pas la bonne métrique de l'espace de la carte de taille. En effet, la longueur métrique telle que définie ne vérifie pas l'inégalité triangulaire puisqu'on intègre sur la droite reliant les sommets de l'arête au lieu de suivre la géodésique entre ces deux points.

La littérature récente propose de ne pas utiliser la formule de Héron, mais d'utiliser l'aire métrique et le volume métrique. Ceci fait apparaître le même problème que pour la formule de Héron. Les critères de forme appliqués directement dans l'espace métrique en prenant des frontières droites sont erronés puisque les mesures V_m et A_m sont fausses. En somme, les critères de forme appliqués dans l'espace métrique tentent de calculer la forme d'un objet difforme.

Basée sur ces constats, la notion de forme métrique n'a pas de sens. En effet, les frontières des éléments dans l'espace métrique sont des courbes tordues dans le cas général. Le critère de forme d'un objet difforme n'a pas de sens. Il faut se tourner vers une autre mesure afin d'évaluer la qualité métrique des éléments.

1.2 Objectifs de recherche

Les processus adaptatifs, tel que celui décrit à la figure 1.2, ont pour objectif d'équ répartir l'erreur d'interpolation. La mise en oeuvre rigoureuse et méthodique d'un processus adapta-

tif doit donc mesurer de façon objective cette équirépartition. De plus, une méthodologie de vérification doit être définie pour les processus adaptatifs afin de certifier que le processus fonctionne. Cette méthodologie doit vérifier chaque composante du processus adaptatif. Notamment, on doit être capable de mesurer jusqu'à quel point un maillage adapté correspond à la carte de taille ayant servi lors de sa génération.

C'est vers ces deux objectifs que s'oriente le présent travail de recherche. Nous proposons donc d'une part de développer une mesure de qualité capable d'évaluer la qualité d'un maillage en regard d'une carte de taille, et d'autre part d'appliquer cette mesure dans le cadre d'une méthodologie de vérification du processus d'adaptation de maillage.

1.3 Plan de la thèse

Le format choisi pour cette thèse est une thèse par articles où les articles sont en annexes. Le chapitre courant a donné les objectifs de la thèse ainsi que les concepts de base nécessaires à la compréhension du problème. Dans le chapitre suivant, on présente une revue de la littérature permettant de montrer l'état de l'art en adaptation de maillage en soulignant les domaines dans lesquels les contributions seront faites. Ainsi, on soulignera les critères de qualité présentement utilisés en adaptation de maillage ainsi que les façons de vérifier les stratégies d'adaptation. Aussi, on regardera les façons de visualiser les quantités utilisées en adaptation ainsi que les stratégies d'adaptation.

Le troisième chapitre fera la synthèse des deux articles en annexe. On résumera donc les points essentiels des articles en présentant la méthodologie utilisée ainsi que les résultats pertinents pour chaque article.

Le quatrième chapitre présentera deux contributions additionnelles développées dans le cadre des travaux de cette thèse. Il s'agit d'une façon de visualiser les actions que l'estimateur d'erreur suggère d'effectuer au maillage ainsi qu'une stratégie de basculement d'arête adaptée au contexte de l'optimisation de maillage.

Le cinquième chapitre contient une discussion générale des contributions de la thèse. On y montre quelques retombées en y listant d'autres travaux qui ont utilisé les contributions de cette thèse.

CHAPITRE 2

REVUE CRITIQUE DE LA LITTÉRATURE

Les méthodes adaptatives font intervenir plusieurs disciplines. Tout d'abord, on doit disposer d'un estimateur d'erreur a posteriori capable d'analyser la solution. Ensuite, on doit faire le lien entre cet estimateur d'erreur et le maillage courant afin de calculer une carte de taille que le maillage doit satisfaire. Ensuite, on peut soit modifier le maillage existant ou en régénérer un nouveau qui satisfait la carte de taille. Finalement, on doit mettre en oeuvre un processus adaptatif qui couple le solveur et l'outil qui calcule le maillage adapté. La revue de la littérature qui suit se décompose donc selon ces disciplines.

2.1 Estimateur d'erreur

Plusieurs estimateurs d'erreurs sont présentés dans la littérature. Les estimateurs dépendent de l'ÉDP et de l'espace dans lequel on cherche l'approximation de la solution. On se concentre ici sur la formulation d'estimateurs pour un seul scalaire. On commence par les estimateurs de type Zienkiewicz et Zhu parce qu'ils jettent les bases de la méthodologie. On présente ensuite une revue des estimateurs d'erreur d'interpolation. La particularité de ces estimateurs est qu'on assume que les valeurs nodales de l'interpolation sont exactes, ce qui permet d'obtenir des bornes serrées. Comme on l'a vu, le lemme de Céa justifie ce choix d'estimateurs. On présente ensuite des estimateurs d'approximation qui n'assument pas que les valeurs nodales sont exactes. On présente ensuite les estimateurs hiérarchiques et les estimateurs par équations résiduelles afin de faire un survol le plus complet possible. On s'attarde au lien entre l'estimateur d'erreur et la carte de taille engendrée par l'estimateur.

2.1.1 Estimateur d'erreur de type Zienkiewicz et Zhu

Zienkiewicz et Zhu ont introduit une classe d'estimateur d'erreur isotrope assez bien documenté dans un des derniers articles de Zienkiewicz (2006). Ces estimateurs sont basés sur une reconstruction de la dérivée de la solution, sur l'utilisation de cette reconstruction par un estimateur d'erreur, puis sur le calcul d'une taille optimale basée sur cet estimateur. Ces méthodes ont été utilisées avec succès entre autres par Labbé (1993) pour des problèmes de potentiel magnétique. Il s'agit d'analyser la norme H_1 de l'erreur d'approximation :

$$\|u - u_h\|_1 = \|u - u_h\|_0 + \|\nabla u - \nabla u_h\|_0. \quad (2.1)$$

Ensuite, on considère que l'erreur sur les gradients converge moins vite que l'erreur sur la solution. Ceci mène à l'expression suivante pour l'erreur d'approximation

$$\|e_A\| \approx \|\nabla u - \nabla u_h\|_0. \quad (2.2)$$

Comme on ne dispose pas de ∇u , on reconstruit une nouvelle solution \tilde{u} dont le gradient $\nabla \tilde{u}$ converge plus vite vers ∇u que ∇u_h converge vers ∇u . C'est donc dire que cette reconstruction est de meilleure qualité que le gradient de la solution numérique et peut donc servir à estimer l'erreur. On aura alors

$$\|e_A\| \approx \|\nabla \tilde{u} - \nabla u_h\|_0. \quad (2.3)$$

Ensuite, Zienkiewicz fait le lien entre cet estimateur et la taille courante du maillage à l'aide du taux de convergence a priori de la méthode et du concept d'équirépartition de l'erreur. Ainsi, le taux de convergence est donné par

$$\|e_A\|_{1,K} \leq Ch_K^{p-m+1}, \quad (2.4)$$

où h_K est le diamètre de l'élément K . Par ailleurs, le principe d'équirépartition, tel qu'utilisé par Zienkiewicz et Zhu (1992b), prévoit que tous les éléments auront la même erreur optimale $\|e_{opt}\|_K$ à la convergence. Dans ce cas, l'erreur total sur un maillage de m éléments est

$$\|e\|_{1,\Omega} = \sqrt{\sum_K \|e_{opt}\|_K^2}, \quad (2.5)$$

$$= \sqrt{m \|e_{opt}\|_K^2}. \quad (2.6)$$

L'erreur relative est donnée par

$$\eta = \frac{\|u - u_h\|}{\|u\|}, \quad (2.7)$$

$$= \frac{\|e_{opt}\|}{\|u_h\| + \|e_{opt}\|}. \quad (2.8)$$

Ceci permet de déterminer que l'erreur élémentaire optimale est

$$\|e_{opt}\| = \frac{n}{(n-1)} \frac{\|u_h\|}{\sqrt{m}}. \quad (2.9)$$

On peut obtenir la taille optimale d'un élément à partir de l'équation 2.4 et de l'équation 2.9.

$$h_{opt} = \sqrt[p-m+1]{\frac{\|e_{opt}\|}{\|e\|_K} h_K^{p-m+1}}. \quad (2.10)$$

Les travaux présentés dans Labbé (1993) utilisent l'approche présentée ci-haut. On note que la carte de taille obtenue est isotrope. Ceci est dû au choix de l'équation 2.4 pour faire le lien entre l'erreur et la taille des éléments.

2.1.2 Estimateur d'erreur d'interpolation

Cette famille d'estimateurs d'erreur majore l'erreur d'approximation par l'erreur d'interpolation, tel que proposé dans Vallet (1992). On utilise le lemme de Céa pour justifier ce choix.

Frey et Alauzet (2005) présentent un estimateur d'erreur d'interpolation qui fait intervenir le calcul du Hessien de la solution exacte :

$$\|u - \Pi_h u\|_{H^1} \leq \frac{9}{32} \max_{y \in K} \left| \langle \overrightarrow{aa}, H_u(y) \overrightarrow{aa} \rangle \right| \quad (2.11)$$

Cette relation lie l'erreur d'interpolation à la longueur de la plus grande arête de l'élément K telle que mesurée dans la métrique issue du Hessien H_u .

Loseille et Alauzet (2009) proposent des estimateurs en norme L^p . Ils montrent que le choix de la norme utilisée dans l'expression de l'erreur d'interpolation mène à des densités cibles différentes. Chen *et al.* (2007) proposent aussi un lien entre l'erreur d'interpolation et la carte de taille en étendant l'approche de Huang et Sun (2003), eux aussi, aux normes L^p . Ils obtiennent

$$\|u - \Pi_h u\|_{L^p(\Omega)} \leq C N^{-2/n} \left\| \sqrt[n]{\det(H)} \right\|_{L^{\frac{pn}{2p+n}}}(\Omega) \quad (2.12)$$

où N est le nombre d'éléments dans la triangulation et la constante C ne dépend ni de u , ni de N . Le cas de $p = \infty$ a été prouvé par D'Azevedo et Simpson (1991) et le cas $p = 2$ a été prouvé par Huang et Sun (2003).

Hetmaniuk et Knupp (2008) trouvent une borne supérieure à l'erreur d'interpolation encore plus serrée que celles présentées précédemment en utilisant les dérivées directionnelles le long des arêtes des éléments. Ils la comparent aux autres bornes et montrent que certaines de ces autres bornes ne convergent pas, alors que les leurs restent convergentes.

Contrairement à l'estimateur de la section précédente, les estimateurs de l'erreur d'interpolation sont anisotropes. Comme on le verra plus loin, ces estimateurs pourront servir à fournir une carte de taille anisotrope au remaillageur.

2.1.3 Estimateur basé sur le résidu

Picasso (2006) utilise un estimateur d'erreur *a posteriori* qui tient compte du résidu du système d'équations sur les éléments, d'une mesure du saut de l'approximation aux frontières des éléments pondéré par une mesure de la forme des frontières, le tout pondéré par une mesure de l'élément influencée par le gradient de l'erreur d'approximation. Cet estimateur est ensuite approximé en négligeant le résidu élémentaire et en approchant l'erreur d'approximation par une méthode similaire à celle de l'équation 2.3 employée par Zienkiewicz et Zhu (1992a). Picasso (2006) convertit cet estimateur en carte de taille donnée sous forme métrique qui tient compte d'une tolérance. Cette tolérance contrôle la densité du maillage résultant.

Bourgault *et al.* (2009) obtient des résultats spectaculaires avec cette approche dans le cas d'écoulements compressibles non visqueux modélisés par les équations d'Euler.

Bernardi *et al.* (2001) font une analyse de ce type d'estimateurs et proposent des extensions aux équations de Stokes. Formaggia *et al.* (2004) aussi proposent des estimateurs de ce type pour les équations de Stokes et présentent des exemples bidimensionnels. Selon Formaggia *et al.* (2004), l'approche s'inspire de la méthode des résidus pondérés par le dual de Rannacher (1998).

2.1.4 Estimateur hiérarchique

Tel que décrit dans Belhamadia *et al.* (2003), les estimateurs hiérarchiques proposent d'utiliser des interpolants hiérarchiques afin d'estimer l'erreur. Les interpolants hiérarchiques sont ceux dont les fonctions de base à l'ordre $k + 1$ sont orthogonales aux fonctions de base à l'ordre k . Cette orthogonalité est difficile à obtenir pour $k = 0$ et $k = 1$ puisque l'interpolant est contraint à représenter la topologie de l'élément. Néanmoins, les fonctions de base des ordres supérieurs peuvent généralement être orthogonales, par exemple en utilisant les polynômes de Legendre. Une comparaison des matrices élémentaires d'un interpolant à l'ordre k et à l'ordre $k + 1$ montre que l'ajout des nouvelles fonctions de base ne change pas le système matriciel à l'ordre k . Ainsi, pour obtenir la solution à l'ordre $k + 1$, il suffit de résoudre le système matriciel engendré par les nouvelles fonctions, en transférant la solution obtenue à l'ordre k dans le membre de droite. Belhamadia *et al.* (2003) proposent des améliorations permettant de rendre le problème local afin d'éviter d'avoir à résoudre le système à l'ordre $k + 1$ globalement. Ces estimateurs ne génèrent pas de carte de taille, ce qui fait qu'il est plus difficile de découpler l'estimateur d'erreur du remaillage.

2.1.5 Carte de taille

Le lien entre l'erreur d'interpolation et le maillage a été établi par d'Azevedo et Simpson (1989) pour la norme L^∞ . En minorant et majorant les valeurs propres de $|H|$, on obtient un espace métrique qui permet de mesurer l'erreur d'interpolation entre n'importe quel couple de points de Ω . On peut ensuite modifier les algorithmes de génération et de modification de maillage de façon à utiliser cette métrique afin de changer la notion de distance entre les points de Ω . Selon D'Azevedo et Simpson (1991), on a donc que :

$$\|u - \Pi_h u\|_{\infty, K} \leq C \|\Delta^t \vec{x} |H(u)| \Delta \vec{x}\| \quad (2.13)$$

où $|H| = R^t |\Lambda| R$ indiquant qu'on prend la valeur absolue des valeurs propres.

Selon Chen *et al.* (2007), en définissant une nouvelle métrique donnée par :

$$M = (\det(H))^{-1/(2p+n)} H, \quad (2.14)$$

tous les simplexes issus de cette mesure sont isotropes et le volume des simplexes est équidistribué dans l'espace de la métrique à la convergence du processus adaptatif.

On voit que tous ces estimateurs dépendent du Hessien et engendrent des cartes de taille anisotropes. Par ailleurs, le choix de la norme a un impact sur la carte de taille. Dans le cas de la norme L^∞ , bien qu'il semble y avoir un débat sur la valeur exacte de C , la formule de d'Azevedo et Simpson (1989) présentée à l'équation 2.13 semble généralement acceptée.

2.2 Reconstruction

Les estimateurs présentés précédemment dépendent du gradient ou du Hessien de la solution exacte. Puisqu'on ne dispose pas de ces valeurs, on utilise des techniques de reconstruction à la fois pour reconstruire les dérivées premières et les dérivées secondes. Ces techniques permettent de reconstruire de meilleurs gradients ou de meilleurs Hessiens que l'information initialement contenue dans la solution numérique. On considère alors que la reconstruction converge plus vite vers les valeurs exactes que ne le fait l'approximation. En effet, si la solution initiale est définie sur des éléments linéaires, alors le gradient de la solution numérique de départ est constant et le Hessien est nul.

C'est le domaine de la structure qui a principalement fait avancer les techniques de reconstruction, car le calcul des stress fait intervenir le gradient de la solution numérique. L'approche initiale consistait à formuler le problème globalement et à assembler une matrice globale permettant d'obtenir les gradients. Or, une formulation locale, dite par *patches*, développée par Zienkiewicz et Zhu (1992a) a permis, entre autres, d'obtenir des gradients

superconvergents dans le sens que ces gradients convergent plus vite que l'ordre de convergence de la solution numérique théorique. Ces méthodes locales sont beaucoup plus faciles et rapides à calculer, car les systèmes à résoudre sont très petits. La réécriture du système à résoudre permet par la suite d'améliorer la stabilité de la méthode Zienkiewicz *et al.* (1993). Certains problèmes de stabilité persistent malgré ces corrections, tels que notés par Labbé et Garon (1995). Des travaux de Yue et Robbins (2007) ont montré que, dans le cas de quadrilatères, une rotation du repère permet d'améliorer considérablement le conditionnement du problème. Une simple preuve expérimentale rend cette solution difficile à étendre aux autres éléments et aux autres dimensions. Certains travaux suggèrent de modifier la formulation du problème de façon à injecter de la physique dans la reconstruction visant à se rapprocher des équations aux dérivées partielles de départ à résoudre.

La plus grande difficulté avec les méthodes de reconstruction est que la qualité de la reconstruction se détériore de façon notable près des parois et des discontinuités. Dans le cas des discontinuités, la reconstruction surestime les gradients, ce qui mène ultimement à des maillages indûment fins. Mais la dégénérescence de la convergence près des parois est très problématique, dû aux phénomènes importants qui peuvent s'y produire. Ilinca et Pelletier (2006) proposent plusieurs modifications permettant d'améliorer la reconstruction sur les parois.

L'étude faite par Vallet *et al.* (2007) est particulièrement intéressante dans un contexte anisotrope. En effet, une attention particulière est portée au comportement des reconstructions sur des maillages anisotropes. Ce type de maillage étant utilisé pour modéliser la couche limite, il est important de disposer d'une reconstruction qui aura un bon comportement pour ce genre de maillage.

Vallet *et al.* (2007) propose une reconstruction qui consiste à construire localement une surface quadratique par moindre carré en utilisant les valeurs de u_h aux sommets voisins de la reconstruction courante. Par ailleurs, Ilinca et Pelletier (2006) et Zienkiewicz *et al.* (1993) recommandent de réécrire le problème de projection dans un repère local afin d'améliorer le conditionnement du système matriciel.

2.3 Optimisation de maillage

Vallet (1992) a montré comment les cartes de taille données sous forme d'espace métrique permettent de combiner l'information sur l'étirement et l'orientation désirés des éléments. Borouchaki (2001) introduit la notion de maillage unité afin de décrire un maillage adapté. Il considère en effet que les arêtes du maillage adapté doivent être de longueur unitaire dans l'espace métrique de la carte de taille.

Loseille et Alauzet (2009) recensent 8 outils d'adaptation de maillage en 3D dont Tango présenté dans Bottasso (2004), Mmg3d présenté dans Dobrzynski et Frey (2008), Forge3d présenté dans Coupez (2000), MeshAdap présenté dans Li *et al.* (2005), Fun3d présenté dans Jones *et al.* (2006), Mom3d présenté dans Tam *et al.* (2000) et celui de Pain *et al.* (2001). TetMesh-GHS3D¹, MEF++ présenté dans Belhamadia *et al.* (2003, 2004), MAdlib présenté dans Compère *et al.* (2010) et **OORT** présenté dans Dompierre *et al.* (2003) sont d'autres outils adaptatifs disponibles. La plupart de ceux-ci fonctionnent par modification de maillage, TetMesh-GHS3D étant l'exception.

Li *et al.* (2005) décrit trois méthodologies d'adaptation de maillage :

- les méthodes de régénération de maillage telles qu'utilisées par George et Borouchaki (1998), Frey et George (1999) et Frey et Alauzet (2005),
- les méthodes par subdivision des éléments telles que celles de Kallinderis et Kavouklis (2005) et Rivara et Levin (1992).
- les méthodes par modifications locales ordonnées telles que celles utilisées par Coupez (2000), Dompierre *et al.* (2002), Coupez et Bigot (2000), Pain *et al.* (2001) et Acikgoz et Bottasso (2007).

Les méthodes de régénération rediscrétisent complètement le domaine à chaque itération. Les méthodes de subdivision des éléments se limitent à raffiner des éléments existants ou à déraffiner des éléments qui auraient été raffinés à une étape précédente. La dernière méthode modifie un maillage existant à l'aide d'opérateurs qui sont appliqués dans un ordre fixe.

Toutes ces méthodologies sont utilisées dans un processus itératif qui converge en appliquant des corrections au maillage de l'itération précédente afin d'équidistribuer l'estimé de l'erreur. Selon Alauzet *et al.* (2007), il s'agit de trouver le point fixe du couple mailleur-solveur. Dans ce contexte, les méthodologies de modifications de maillages devraient nécessiter de moins en moins d'opérations lorsque le couple mailleur-solveur converge.

Les approches par modifications locales posent le problème d'adaptation comme un problème d'optimisation qui travaille sur le nombre et la position des sommets du maillage ainsi que sur la connexion entre ces sommets. En appliquant des opérateurs continus et discrets, le maillage est optimisé de façon à satisfaire les spécifications de l'estimateur d'erreur sous contrainte de respecter la géométrie. Pour bien caractériser le problème d'optimisation, on doit identifier la fonction coût, les degrés de liberté, les contraintes et l'algorithme permettant d'optimiser les degrés de liberté.

¹disponible à <http://www.distene.com/build/meshadapt.html> en novembre 2010

2.3.1 Fonction coût

Parallèlement à nos travaux, Bottasso (2004) définit une fonction coût unique pour l'ensemble du processus adaptatif. On cherche une fonction coût capable d'évaluer à quel point un maillage est conforme à la carte de taille qu'il doit satisfaire telle que donnée sous forme d'un champ de tenseurs métriques. Avant ces travaux, l'optimisation se basait sur des critères de longueur et sur des critères de forme parfois difficiles à évaluer dans un espace métrique.

2.3.2 Degrés de liberté

Un maillage est composé d'éléments, eux-mêmes composés de sommets, qui ont à leur tour des coordonnées dans l'espace réel. Les degrés de liberté d'un maillage sont donc les coordonnées des sommets du maillage ainsi que la façon de connecter ces sommets afin d'obtenir les éléments du maillage qui recouvriront le domaine de calcul. Comme vu précédemment, ce ne sont pas toutes les méthodes d'adaptation qui optimisent la position et la topologie. En effet, certaines méthodes ne font que du lissage ou que du raffinement. Cependant, une méthode qui peut travailler sur tous les degrés de liberté devrait mieux équilibrer l'erreur d'interpolation.

2.3.3 Contraintes

Les contraintes sont tout d'abord d'ordre topologique. L'union des éléments du maillage doit rester une discrétisation du domaine. Il faut donc préserver les sommets, les arêtes, les faces et les volumes de la topologie. Notamment, il ne faut pas changer le genre topologique du domaine. Beall *et al.* (2003) présentent les difficultés liées à la définition du modèle topologique que le maillage est censé discrétiser.

Il faut ensuite que les coordonnées des sommets sur les frontières restent sur les frontières de la géométrie tel que décrit par Shephard *et al.* (2005). Il faut donc connaître la représentation géométrique de ces frontières afin d'en assurer l'intégrité. Dans leur représentation générale, les domaines sont définis à l'aide de NURBS selon le modèle présenté dans la section 1.1.1. Il faut donc être capable de connaître la position des sommets du maillage sur les surfaces NURBS afin de s'assurer que lesdits sommets restent sur le modèle géométrique en utilisant les stratégies de projection et de localisation de la section 1.1.1. De plus, il faut que les coordonnées des sommets du maillage ne soient pas confondues. Ceci implique que la distance entre deux sommets doit être supérieure à une tolérance.

Finalement, un ensemble de contraintes additionnelles qui représentent des limitations d'autres outils intervenant dans la chaîne d'analyse doivent conceptuellement être prises en compte. Ainsi, on peut exiger un étirement maximum, un volume minimal ou maximal ou

encore une longueur minimale ou maximale des arêtes.

2.3.4 Algorithme

On constate qu'on fait face à la fois à un problème d'optimisation continue et à un problème d'optimisation discret. En effet, trouver la position optimale des coordonnées du maillage est un problème continu puisque les coordonnées sont dans R^3 et que la fonction coût est différentiable. En revanche, trouver la façon optimale de connecter les sommets du maillage est un problème discret qui consiste à comparer des connectivités différentes et à choisir celle qui optimise la fonction coût. Il en est de même pour l'ajout et le retrait de sommets.

On liste donc ici un ensemble d'opérateurs capable de modifier les degrés de liberté pour le problème discontinu et pour le problème continu, par déplacement de noeuds. On s'intéresse aux façons de raffiner le maillage en ajoutant des éléments, aux façons de déraffiner le maillage en enlevant des éléments du maillage ainsi qu'aux façons de reconnecter les éléments sans changer le nombre de sommets dans le maillage.

Ajout de noeuds

L'ajout de noeuds peut se faire par une insertion de type Delaunay à l'aide des techniques présentées dans George et Borouchaki (2002), ce qui permet d'obtenir un maillage de qualité après l'insertion. Coupez (2000) profite du basculement des arêtes pour ajouter une nouvelle configuration dans laquelle il scinde l'arête à basculer. On peut aussi simplement scinder une arête, une face ou un élément du maillage, ce qui permet d'obtenir un résultat topologiquement valide, mais qui n'est pas nécessairement de qualité. En effet, ce type de raffinement génère entre autres des nouveaux sommets qui sont sous connectés. Par exemple, dans le cas bidimensionnel, on a une arête entre deux faces. Quand on raffine cette arête, le nouveau sommet est connecté à seulement quatre triangles alors qu'il y a six éléments autour des sommets des maillages réguliers. Le cas tridimensionnel est similaire. Il faut donc lisser la topologie afin de mieux connecter ces nouveaux sommets. La position de ces nouveaux sommets est aussi problématique, car il est difficile de connaître a priori la position optimale où placer le nouveau sommet tant qu'on ne sait pas exactement à quels éléments il sera connecté.

Retrait de noeuds

Tel que noté dans George et Borouchaki (1997), le déraffinement n'est pas toujours possible, par exemple pour le polyèdre de Schönhart. Néanmoins, on peut utiliser une stratégie de

déraffinement par suppression d'arête, telle que présentée dans George et Borouchaki (1997). Cette stratégie déraffine le maillage en implosant les arêtes du maillage qui sont trop courtes. On choisit le sommet meurtrier de l'arête qui s'écrase contre le sommet victime de l'arête. Si les deux sommets ne sont pas contraints à la frontière, ils se rencontrent au milieu de l'arête. Si un des sommets est contraint à la frontière, alors il devient le sommet victime et ne bouge pas. Si les deux sommets sont contraints à la frontière, alors le déraffinement est impossible. Cette stratégie permet de traiter correctement les frontières. Certains cas pathologiques sont facilement identifiables si on considère que tous les éléments affectés par cette opération doivent rester conformes après l'opération. Il faut remarquer que les sommets meurtriers sont surconnectés. Il faut donc marquer les arêtes connectées à ce sommet comme candidat pour le basculement afin de réduire le nombre d'arêtes connectées au sommet meurtrier.

Il faut noter que les approches de régénération de maillage adapté (par exemple TetMesh-GHS3D) peuvent potentiellement se passer de cette opération qui peut être coûteuse. En effet, on peut éviter d'avoir à enlever des sommets si on réussit à les placer aux bons endroits à chaque itération.

Retournement de faces

Le retournement de face consiste à remplacer une face qui partage deux tétraèdres par trois tétraèdres ayant la même enveloppe externe, mais qui partagent une arête interne commune tel que décrit dans Lo (2001) ainsi que dans George et Borouchaki (1997). On voit donc que cette opération ajoute un tétraèdre. Aussi, cette opération fait apparaître une nouvelle arête et ajoute donc une connexion supplémentaire aux deux sommets de cette arête. Cette opération permet donc d'ajouter des connexions aux sommets sousconnectés. L'opération inverse consiste à remplacer trois tétraèdres partageant une arête par deux tétraèdres partageant une face. Tel que noté dans George et Borouchaki (1997), cet opérateur peut être appliqué dans le cas où le polyèdre formé par les deux éléments de départ est convexe.

Basculement d'arêtes

Le basculement d'arête est très bien documenté dans Coupez (1991) et Frey et George (1999). Il s'agit de reconnecter la boule formée par l'ensemble des tétraèdres qui partagent une arête de façon à faire disparaître l'arête tout en améliorant la qualité du maillage. Liu *et al.* (2009) proposent un algorithme récursif pour résoudre ce problème.

Chaque tétraèdre partageant une arête a deux sommets qui n'appartiennent pas à l'arête. La suite ordonnée de ces sommets est la *boucle* de l'arête. On voit que cette boucle est *ouverte* pour une arête frontière et est *fermée* pour une arête interne. On s'intéresse au cas de

la boucle fermée qui est le cas le plus usuel. Tous les maillages alternatifs du sous domaine formé par les N tétraèdres partageant une arête interne correspondent en une triangulation de boucle décrite précédemment. En effet, il suffit de connecter chaque triangle de la triangulation de la boucle alternativement aux deux sommets de l'arête pour obtenir le maillage de tétraèdres final. On réduit ainsi le problème de trouver un maillage alternatif en un problème de triangulation d'une boucle. Les triangulations possibles d'un polygone de N sommets est un problème étudié par Euler. Le nombre de Catalan donne le nombre de triangulations possible d'un N -gone :

$$C_n = \frac{1}{n+1} \binom{2n}{n} = \frac{(2n!)}{(n+1)!n!} \quad (2.15)$$

Ce nombre croit très rapidement avec le nombre d'éléments qui partagent l'arête. Par exemple, la boucle formée autour d'une arête entourée de 10 tétraèdres peut être reconnectée de 1430 façons différentes. Dans le cas de 14 tétraèdres, ce nombre monte à 208012.

Déplacement

Le déplacement permet de lisser le maillage. Il s'agit d'un problème d'optimisation continu qui agit seulement sur les coordonnées des sommets tel que documenté dans Dompierre *et al.* (2002), Sirois *et al.* (2010), Freitag et Ollivier-Gooch (1997) et Knupp (2000). Le problème local consiste à considérer un sommet et la boucle formée par tous les éléments connectés à ce sommet. Le lissage consiste alors à déplacer le sommet de façon à optimiser la fonction coût. La littérature abonde en références sur l'utilisation de l'opérateur de déplacement notamment pour les maillages structurés. Cet opérateur est le seul utilisé dans les méthodes d'adaptation appelées la r -adaptation. Les méthodes les plus simples font du barycentrage alors que les plus complexes utilisent une analogie de ressorts raidis par la forme des éléments, le tout évalué dans l'espace métrique. Les méthodes d'optimisation à gradient optimisent généralement bien le problème. Cependant, tel que noté dans Sirois *et al.* (2010), on doit parfois avoir recours à des algorithmes de force brute qui n'utilisent pas le gradient afin de trouver le minimum.

2.4 Synthèse

On voit donc que la mise en oeuvre du processus décrit à la figure 1.2 requiert la mise en oeuvre d'un estimateur d'erreur, de la conversion de cet estimateur en espace métrique continu et du calcul d'un maillage adapté. Bien que le contexte soit d'obtenir des solutions fiables aux problèmes de Navier-Stokes pour des écoulements internes incompressibles à haut Reynolds, on se fixe comme premier objectif de mettre en oeuvre un processus adaptatif

capable de contrôler l'erreur d'un problème à un seul scalaire. On choisit un estimateur d'erreur d'interpolation dû à la simplicité de ce type d'estimateur et au succès de cette approche dans la littérature. On utilise la norme L^∞ et la méthode proposée par d'Azevedo et Simpson (1989) pour obtenir l'espace métrique. On utilise la reconstruction proposée par Vallet *et al.* (2007) pour son comportement sur des maillages étirés. Finalement, on choisit une méthode par modification de maillage pour obtenir le maillage adapté puisque cette approche requiert de moins en moins d'opérations quand le processus d'adaptation fait converger le couple mailleur-solveur.

Pour faire une mise en oeuvre rigoureuse et méthodique du processus adaptatif, on doit se doter des mesures qui nous permettront d'évaluer la qualité de notre travail. Bien que la procédure de reconstruction de la solution propose des mesures appropriées pour la vérification, il n'en est pas de même pour le calcul du maillage adapté et pour le processus adaptatif lui-même. En effet, on utilise les longueurs métriques des arêtes et la forme métrique des éléments pour quantifier la qualité des maillages adaptés. Il est préférable d'avoir une mesure unique et universelle capable de mesurer la qualité du maillage adapté en regard de la carte de taille qui est censé contrôler le maillage. Dans le cas du processus adaptatif, les références recensées montrent les graphes de convergence de l'erreur d'approximation sur l'ensemble du domaine. Or, ces graphes ne sont pas suffisants pour garantir le contrôle de l'équirépartition de l'erreur d'approximation. Il manque donc une mesure de l'équirépartition de l'erreur d'approximation afin de quantifier à quel point le processus adaptatif a atteint son objectif.

CHAPITRE 3

SYNTHÈSE DE L'ENSEMBLE DU TRAVAIL

Ce chapitre fait une synthèse des deux articles présentés en annexe. On présente donc les résultats essentiels de ces articles ainsi que la méthodologie utilisée dans ces articles et on commente les résultats obtenus. Ces deux articles concernent l'élaboration de mesures rigoureuses permettant de vérifier la mise en oeuvre d'un processus adaptatif.

3.1 Non-conformité

Lors du calcul du maillage adapté à la carte de taille, on doit disposer d'une mesure objective qui évalue la qualité des éléments en regard de la taille cible et de l'orientation cible telles que spécifiées par la carte de taille. Cette mesure pourra aussi servir à guider les opérateurs censés améliorer le maillage. La mesure pourra aussi servir à comparer des heuristiques différentes d'adaptation de maillage.

Dans la littérature, on disposait de deux mesures différentes capables de mesurer la qualité des maillages. La première mesure est la longueur métrique des arêtes. Cette mesure, présentée par Vallet (1992), met directement en valeur l'information contenue dans la carte de taille. Cette mesure est peu coûteuse et est souvent utilisée pour déterminer si le maillage a la bonne densité. Ainsi, la longueur métrique des arêtes est utilisée par Frey et George (1999) dans le calcul de l'indice d'efficacité de l'arête donnée par :

$$e_{AB} = \begin{cases} 1 - L_{M_S}(AB) & \text{if } L_{M_S}(AB) \leq 1, \\ 1 - 1/L_{M_S}(AB) & \text{if } L_{M_S}(AB) > 1, \end{cases} \quad (3.1)$$

où $L_{M_S}(AB)$ est la longueur métrique de l'arête AB telle que donnée à l'équation 1.21.

Cette mesure permet d'obtenir un maillage qui aura des arêtes de la bonne longueur. Cependant, cette mesure n'indique pas comment connecter les arêtes pour former des éléments ayant la bonne forme. L'approche traditionnelle consiste alors à jumeler la longueur métrique des arêtes à un critère de forme. Les critères de formes qui satisfont la Définition 1 étant tous équivalents entre eux, on retiendra le critère de forme η donné à l'équation 1.24. Ce critère est maximum quand l'élément est régulier, et nul quand l'élément est dégénéré puisque η est le rapport du volume sur l'aire des frontières. Cependant, dans le cas de maillages adaptés où les arêtes sont unitaires dans la métrique, il faut tenir compte de la métrique lors du calcul

de la forme, puisque les arêtes sont très étirées dans l'espace euclidien.

Telle que décrit dans l'introduction, le calcul de la forme d'un élément dans l'espace métrique est très complexe puisque les frontières de l'élément sont des géodésiques. On propose plutôt de comparer la métrique de la transformation qui rend K équilatéral unitaire aux prescriptions de la carte de taille. On pose comme hypothèse que cette mesure permet d'évaluer la non conformité du maillage par rapport à la carte de taille.

Voici la méthodologie employée pour démontrer que la mesure de non-conformité permet d'évaluer correctement à quel point un élément correspond aux spécifications contenues dans la carte de taille. On commence par définir l'information contenue dans la carte de taille. Par ailleurs, on peut obtenir une information de même nature à partir des éléments du maillage. On détermine les prescriptions moyennes de la carte de taille sur le domaine de l'élément du maillage, ce qui nous permet de présenter la mesure de non-conformité en comparant l'élément aux prescriptions moyennes sur l'élément. On obtient la forme générale de la mesure de non-conformité en étendant la mesure aux éléments non-simpliciaux. Cette mesure généralise des mesures déjà utilisées dans la littérature. On propose ensuite la façon de calculer la non-conformité d'un maillage complet. On termine en présentant quelques cas de validation.

3.1.1 Carte de taille

Tout d'abord, une carte de taille spécifiée sous forme d'espace métrique utilise les concepts de base présentés à la section 1.1.6. Il s'agit d'un champ de tenseurs symétriques définis positifs qui sont interpolés à l'aide d'un interpolant linéaire continu par morceau. Ces tenseurs sont utilisés comme une métrique afin de modifier le calcul de la longueur des arêtes.

A cet effet, on prend l'exemple d'une carte de taille dont les tenseurs seraient $\begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ partout sur le domaine. Dans ce cas, le triangle ABC dont les sommets seraient positionnés aux points $A = (1, 1)^T$, $B = (3/2, 1)^T$ et $C = (5/4, \sqrt{3}/2 + 1)^T$ serait parfait. En effet, la longueur des trois arêtes mesurées dans la métrique de la carte de taille serait de longueur unité telle que donnée par :

$$\begin{aligned} AB : \quad & (1/2 \quad 0) \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/2 \\ 0 \end{pmatrix} = 1 \\ BC : \quad & (-1/4 \quad \sqrt{3}/2) \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1/4 \\ \sqrt{3}/2 \end{pmatrix} = 1 \\ CA : \quad & (-1/4 \quad -\sqrt{3}/2) \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1/4 \\ -\sqrt{3}/2 \end{pmatrix} = 1 \end{aligned} \tag{3.2}$$

Cet exemple illustre l'utilisation de la carte de taille pour modifier le calcul de la longueur

des arêtes.

3.1.2 Métrique d'un simplexe

Soit M_K , la métrique de la transformation qui rend K équilatéral et unitaire. Cette métrique est souvent utilisée lors du calcul de la qualité des éléments du maillage. En effet, cette métrique détecte les dégénérescence de l'élément K .

On limite tout d'abord ce calcul aux simplexes. Dans ces cas, le nombre d'arêtes correspond au nombre de termes dans le tenseur. On montre ainsi une formulation du calcul de M_K qui est très intuitive et facile à comprendre. Il s'agit de trouver les termes du tenseurs tels que la longueur des arêtes soit unitaire. On obtient alors le système :

$$\Delta \vec{X}_{ij}^t M_K \Delta \vec{X}_{ij} = 1 \quad (3.3)$$

où $\Delta \vec{X}_{ij}$ est l'arête qui relie le sommet i au sommet j . Pour le triangle ABC , ceci donne le système

$$\begin{aligned} m_{11}(x_B - x_A)^2 + 2m_{12}(x_B - x_A)(y_B - y_A) + m_{22}(y_B - y_A)^2 &= 1, \\ m_{11}(x_C - x_A)^2 + 2m_{12}(x_C - x_A)(y_C - y_A) + m_{22}(y_C - y_A)^2 &= 1, \\ m_{11}(x_C - x_B)^2 + 2m_{12}(x_C - x_B)(y_C - y_B) + m_{22}(y_C - y_B)^2 &= 1, \end{aligned} \quad (3.4)$$

où la définition de l'équation 1.13 est utilisée pour les termes de la métrique. On voit que l'équation 3.4 est linéaire en terme des composantes du tenseur. On peut donc résoudre directement ce système afin d'obtenir la métrique M_K . Cette solution sera unique pour les triangles non dégénérés. On peut appliquer la même procédure pour trouver la métrique qui rend un tétraèdre équilatéral unitaire.

Afin d'illustrer le calcul de la métrique qui rend un triangle régulier, on calcule le tenseur métrique d'un triangle avec une arête fixe de longueur unitaire, et dont le troisième sommet est libre de se déplacer. On choisit le triangle ABC tel que $A = (0, 1/2)^T$, $B = (0, -1/2)^T$ et on laisse le sommet $C = (x, y)^T$ se déplacer dans le demi espace $x \geq 0$. Le système d'équations 3.4 se réduit alors à :

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ x^2 & 2x(y - \frac{1}{2}) & (y - \frac{1}{2})^2 \\ x^2 & 2x(y + \frac{1}{2}) & (y + \frac{1}{2})^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m_{11} \\ m_{12} \\ m_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

ce qui donne :

$$M_K = \begin{pmatrix} \frac{4y^2 + 3}{4x^2} & \frac{-y}{x} \\ \frac{-y}{x} & 1 \end{pmatrix}. \quad (3.5)$$

Ce tenseur métrique M_K devient la matrice identité quand le sommet $C(x, y) = (\sqrt{3}/2, 0)^T$, ce qui correspond au triangle régulier.

On visualise les tenseurs métriques M_K à l'aide de la décomposition proposée à l'équation 1.14. Les valeurs propres de M_K étant proportionnelles à des densités au carré, on visualise plutôt le tenseur métrique M_K en traçant des ellipses dont l'orientation est donnée par $R(\theta)$ et dont les étirements sont données par $1/\sqrt{3\lambda_i}$ où les λ_i sont les valeurs propres de M_K telle que présentée à l'équation 1.15 afin que les ellipses passent par les sommets de K . On illustre ce choix à la figure 3.1 où les ellipses d'un nombre choisi de triangles sont dessinées. On voit que les ellipses passent bel et bien par les sommets des triangles.

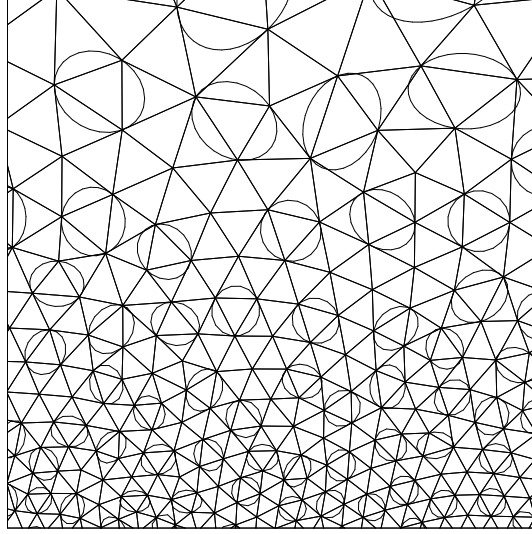


Figure 3.1 Ellipses associées aux tenseurs métriques de certains triangles.

Toute cette procédure s'applique directement au cas des tétraèdres.

3.1.3 Tenseur métrique cible moyen

Puisque le maillage courant peut différer du maillage de la carte de taille, un élément du maillage courant peut recouvrir plusieurs éléments du maillage de la carte de taille. On introduit la notion de métrique cible moyenne, à laquelle on pourra comparer la métrique M_K de l'élément K . On obtient cette métrique moyenne en intégrant chaque composante sur l'élément K , puis en divisant par la norme de K .

$$\overline{M}_S(K) = \left(\int_K M_S(X) dK \right) / \left(\int_K dK \right). \quad (3.6)$$

3.1.4 Mesure de non-conformité

La mesure de non-conformité \mathcal{E}_K est basée sur le constat que le triangle parfait est celui dont la métrique M_K est égale à la métrique cible moyenne $\overline{M}_S(K)$ définie précédemment. Dans ce cas, on a :

$$M_K = \overline{M}_S(K). \quad (3.7)$$

Or, en pratique, on n'obtient jamais cette égalité. Puisqu'il s'agit de matrices, on réécrit donc l'équation 3.7 des deux façons suivantes :

$$\overline{M}_S^{-1} M_K = I \quad \text{et} \quad M_K^{-1} \overline{M}_S = I, \quad (3.8)$$

où I est la matrice identité. Quand il y a une différence entre la métrique de l'élément et la métrique cible, on obtient plutôt une matrice résiduelle pour chacune des deux équations précédentes :

$$R_s = \overline{M}_S^{-1} M_K - I \quad \text{et} \quad R_b = M_K^{-1} \overline{M}_S - I. \quad (3.9)$$

où R_s est sensible aux dégénérescence de l'élément K et R_b est sensible aux cas où K devient très grand par rapport à la cible.

On utilise le triangle de la section précédente afin d'illustrer le comportement de ces résidus. Le tenseur métrique de ce triangle est donné par l'équation 3.5. Si on désire obtenir un élément régulier, la métrique moyenne cible sera la matrice identité, i.e $\overline{M}_S = I$. On peut alors réécrire les équations 3.9 en tenant compte de l'équation 3.5 et du fait que $\overline{M}_S = I$ afin d'obtenir :

$$R_s(x, y) = I \begin{pmatrix} \frac{4y^2 + 3}{4x^2} & -\frac{y}{x} \\ -\frac{y}{x} & 1 \end{pmatrix} - I = \begin{pmatrix} \frac{4y^2 + 3}{4x^2} - 1 & -\frac{y}{x} \\ -\frac{y}{x} & 0 \end{pmatrix}, \quad (3.10)$$

$$R_b(x, y) = \begin{pmatrix} \frac{4x^2}{3} & \frac{4xy}{3} \\ \frac{4xy}{3} & \frac{4y^2}{3} + 1 \end{pmatrix} I - I = \begin{pmatrix} \frac{4x^2}{3} - 1 & \frac{4xy}{3} \\ \frac{4xy}{3} & \frac{4y^2}{3} \end{pmatrix}. \quad (3.11)$$

De plus, si on s'intéresse aux cas où le troisième sommet se déplace sur l'axe $y = 0$. Dans ce cas, tous les termes des matrices de l'équation 3.10 et de l'équation 3.11 s'annulent sauf le terme (1,1) de ces tenseurs. Reste alors $R_s = 3/(4x^2)$ et $R_b = 4x^2/3$. La figure 3.2 présente un graphe des deux termes restants dans ce cas. On voit que les deux courbes s'intersectent en $x = \sqrt{3}/2$, là où les deux résidus s'annulent. Ce point correspond exactement au triangle demandé par la métrique cible. Les deux composantes ont un comportement

symétrique. Si on prend R_b , on voit que cette composante augmente quand l'aire de K augmente. On voit aussi que R_b s'annule quand K correspond exactement à ce qui est demandé. On voit finalement que R_b tend asymptotiquement vers -1.0 quand K devient petit. De façon symétrique, R_s augmente quand K devient petit. C'est cette composante qui sera sensible aux dégénérescences de K . Cet exemple illustre donc comment la non conformité est sensible à la fois aux dégénérescence de K et aux configurations pour lesquelles $K \gg M_s$.

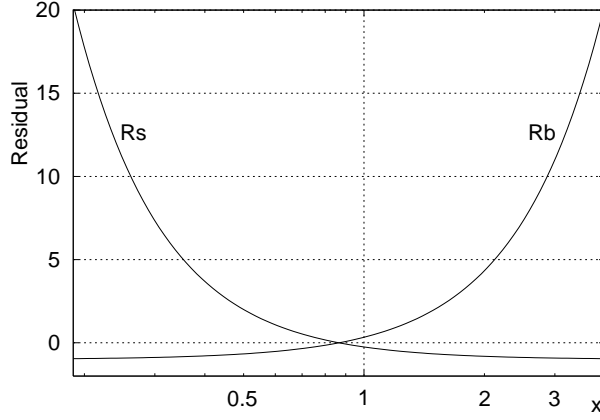


Figure 3.2 Premier terme des résidus $R_s(x, 0)$ et $R_b(x, 0)$ (Eqs. 3.10 et 3.11) en fonction du $\log_{10}(x)$.

On présente le résidu total R_t qui entrera dans le calcul de la non-conformité :

$$R_t = R_s + R_b = \overline{M}_S^{-1} M_K + M_K^{-1} \overline{M}_S - 2I. \quad (3.12)$$

La mesure de non-conformité \mathcal{E}_K d'un simplexe K par rapport à la métrique cible moyenne est définie comme étant la norme Euclidienne du résidu total R_t défini à l'équation 3.12.

$$\mathcal{E}_K = \|R_t\| = \sqrt{\text{tr}(R_t^T R_t)}. \quad (3.13)$$

La norme Euclidienne d'une matrice $\|\cdot\|$ est la somme des carrés des termes de la matrice.

La mesure de non-conformité est sensible aux différences de tailles et d'orientation entre l'élément K et la métrique cible M_S . Cette mesure est continue et différentiable, ce qui est très souhaitable en optimisation. Elle peut être généralisée à toute dimension d'espace d , et s'évalue de façon simple pour $d = 2$ et $d = 3$.

On reprend l'exemple du triangle précédent, dont deux sommets étaient fixés et le troisième sommet était libre de se déplacer. Dans le cas où la métrique cible est la matrice identité, le

coefficient de non-conformité s'exprime à l'aide des équations 3.10 et 3.11 comme étant :

$$\mathcal{E}_K = \left[\left(\frac{4y^2 + 3}{4x^2} - 2 + \frac{4x^2}{3} \right)^2 + 2 \left(\frac{4xy}{3} - \frac{y}{x} \right)^2 + \frac{16y^4}{9} \right]^{1/2}. \quad (3.14)$$

La figure 3.3(a) représente le logarithme base 10 de \mathcal{E}_K décrit à l'équation 3.14. La non-conformité est minimum et nulle pour le triangle régulier et augmente très rapidement quand le troisième sommet se déplace. La non-conformité est infinie pour toutes les dégénérescence du triangle.

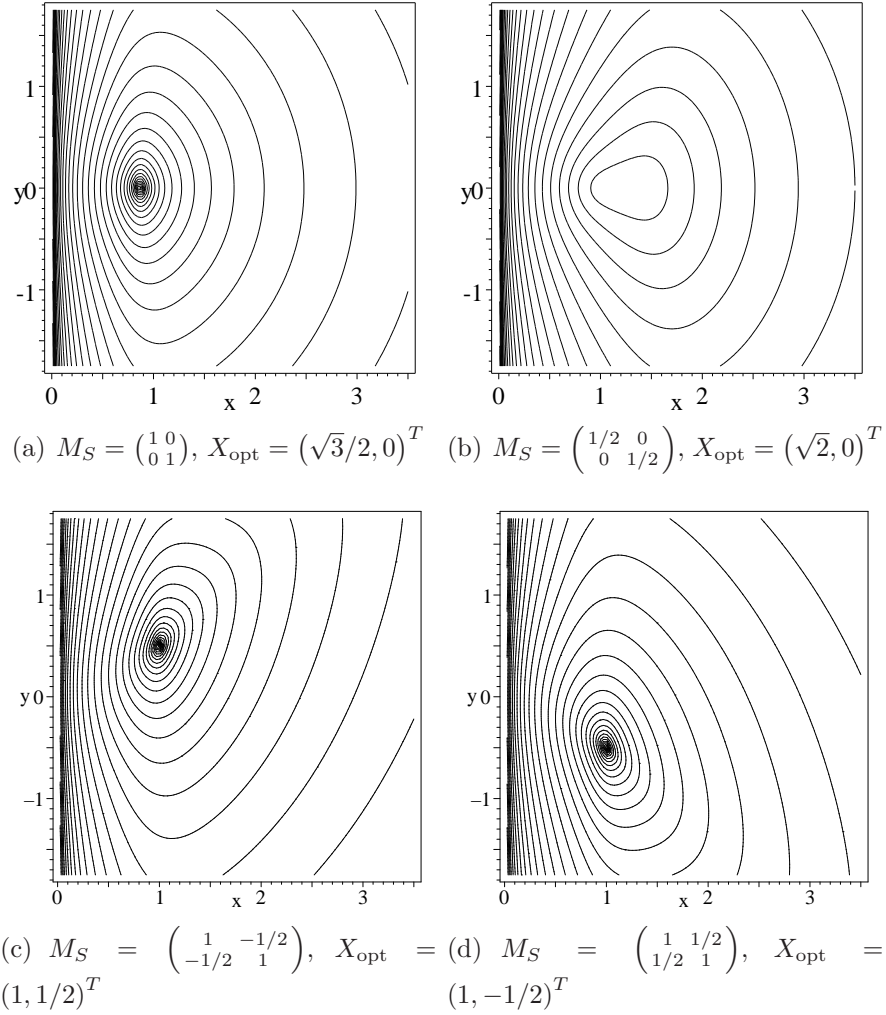


Figure 3.3 Isolignes du $\log_{10}(\mathcal{E}_K)$ avec quelques cartes de tailles variées.

Dans le cas de la figure 3.3(b), la métrique cible a été fixée à la moitié de la matrice identité. L'arête qui est fixée sur l'axe $x = 0$ est donc trop courte par un facteur de $\sqrt{2}$. Étant donné que cette arête est fixée, il est impossible d'obtenir le triangle qui satisfait parfaitement

la métrique cible simplement en bougeant le troisième sommet. La valeur minimum de \mathcal{E}_K sera 0.5 et sera atteinte quand $X = (\sqrt{3}/2, 0)^T$, ce qui est une position intermédiaire entre le triangle équilatéral quand le troisième sommet est à $(\sqrt{3}/2, 0)^T$ et le triangle d'aire optimal quand le troisième sommet se trouve à $(\sqrt{3}, 0)^T$. Dans ce cas, le meilleur triangle est donc un compromis entre la taille et la forme selon le critère de non-conformité.

Dans le cas des figures 3.3(c) et 3.3(d), la métrique cible demande un triangle rectangle, et la mesure de non-conformité est minimum pour le triangle dont le troisième sommet est à la bonne position.

3.1.5 Extension aux éléments non-simpliciaux

Dans le cas des éléments non-simpliciaux, la transformation qui rend l'élément K équilatéral et unitaire est non-linéaire. Dans ce cas, le Jacobien de la transformation varie en tous points de l'espace, et la métrique de cette transformation n'est plus constante.

On en vient donc à proposer que la non-conformité soit évaluée en tous points de l'espace, et donc à laisser tomber le concept de métrique cible moyenne. On compare alors la valeur ponctuelle de M_K avec la valeur ponctuelle de M_S . On a alors

$$\mathcal{M}_K(X) = \mathcal{M}_S(X), \forall X \in K. \quad (3.15)$$

On propose ensuite de prendre une valeur intégrale pour R_t qui est donnée par :

$$R_t = \int_K (M_S^{-1}(X)M_K(X) + M_K^{-1}(X)M_S(X) - 2I) dK \Big/ \left(\int_K dK \right). \quad (3.16)$$

Cette formule généralise l'équation 3.12. Il faut noter qu'il aurait été plus approprié d'intégrer la norme Euclidienne de R_t , ce qui correspond à intégrer un scalaire sur le domaine de K . L'intégration d'un tenseur sur un élément semble être une opération peu usuelle. De plus, Sirois *et al.* (2010) présentent une version améliorée de la non-conformité pour les éléments non-simpliciaux en illustrant la méthode avec des cas de validation.

3.1.6 Une mesure générale

La non conformité peut se réécrire pour correspondre à d'autres mesures utilisées pour évaluer la qualité des maillages. Elle devient donc une généralisation de ces autres mesures. Voici donc quelques mesures usuelles et les démonstrations montrant que la mesure de non-conformité est une généralisation de celles-ci.

Index de taille d'un simplex

Cuillère (1998) a défini l'index de taille d'un simplex. Cette index est basé sur le fait que l'aire d'un triangle parfait est $\sqrt{3}/4$ et que le volume d'un tétraèdre parfait est $\sqrt{2}/12$. Cette mesure reste vraie dans l'espace métrique. On obtient

$$\int_K \sqrt{\det(M_K)} dK = C_K = \begin{cases} \sqrt{3}/4 & \text{en 2D,} \\ \sqrt{2}/12 & \text{en 3D.} \end{cases} \quad (3.17)$$

L'index de taille du simplex \mathcal{Q}_K peut donc s'écrire :

$$\mathcal{Q}_K = C C_K^{-1} \int_K \sqrt{\det(M_S)} dK \quad (3.18)$$

où C est une constante globale qui permet de cibler un nombre d'éléments pour le maillage adapté. Si un élément à la bonne taille dans l'espace métrique, son index de taille \mathcal{Q}_K sera unitaire.

L'index de taille d'un simplex est une forme intégrale de la conformité entre la métrique M_K du simplex et la métrique cible $\overline{M}_S(K)$ telle que donnée à l'équation 3.7 :

$$M_K = \overline{M}_S(K) \Rightarrow \int_K \sqrt{\det(M_K)} dK = \int_K \sqrt{\det(\overline{M}_S(K))} dK \quad (3.19)$$

et \mathcal{Q}_K est obtenu en divisant par C_K . On conclut que \mathcal{E}_K et \mathcal{Q}_K ont tous deux l'équation 3.7 comme point de départ, mais que \mathcal{Q}_K est une forme affaiblie de l'équation 3.7 puisqu'elle ne tient pas compte de la nature matricielle de la relation en convertissant immédiatement le tenseur en scalaire.

Index d'efficacité d'une arête

L'indice d'efficacité d'une arête e_{AB} est défini à partir de la longueur de l'arête $L_{M_S}(AB)$ dans l'espace métrique M_S à l'aide de l'équation 3.1. Si une arête a la bonne taille dans l'espace métrique cible, son index d'efficacité e_{AB} sera nul.

Tout d'abord, cet index d'efficacité peut se réécrire de la façon suivante :

$$\tilde{e}_{AB} = L_{M_S}(AB) + \frac{1}{L_{M_S}(AB)} - 2, \quad (3.20)$$

ce qui permet d'éliminer le "si". Cet index peut être obtenu à partir de l'équation 3.15 de la

façon suivante :

$$M_K(X) = M_S(X) \Rightarrow \int_{AB} \sqrt{AB^T M_K(X) AB} = \int_{AB} \sqrt{AB^T M_S(X) AB}. \quad (3.21)$$

Le terme de gauche est toujours unitaire par définition de $M_K(X)$. Le terme de droite est la longueur de l'arête AB dans l'espace métrique cible M_S . L'équation de conformité mène donc à

$$L_{M_S}(AB) = 1 \quad (3.22)$$

ce qui peut se réécrire comme deux résidus :

$$R_1 = 1 - L_{M_S}(AB) \quad \text{or} \quad R_2 = 1 - 1/L_{M_S}(AB)$$

qui, lorsqu'on les somme, donne \tilde{e}_{AB} . On voit donc que \mathcal{E}_K et \tilde{e}_{AB} ont comme origine l'équation 3.15, mais que \tilde{e}_{AB} est une mesure qui se limite au arêtes alors que \mathcal{E}_K peut tenir compte d'un élément K au complet.

Critères de tailles

Freitag et Knupp (1999) propose le conditionnement κ de la métrique M_K du simplex K comme mesure de qualité :

$$\kappa = \sqrt{\text{tr}(M_K)\text{tr}(M_K^{-1})} = \sqrt{\text{tr}(\Lambda_K)\text{tr}(\Lambda_K^{-1})} \quad (3.23)$$

en utilisant la décomposition $M = R \Lambda R^{-1}$. On peut réécrire l'opérateur trace pour obtenir

$$\kappa = \sqrt{\left(\sum_i \lambda_{K,i}\right) \left(\sum_i \lambda_{K,i}^{-1}\right)}. \quad (3.24)$$

Le critère de forme κ est unitaire pour le simplex équilatérale, i.e. quand tous les $\lambda_{K,i}$ sont égaux, et tend vers l'infini quand le simplex dégénère. Ce critère de forme ne tient pas compte des spécifications de la carte de taille. Pour obtenir un équivalent à partir de la non-conformité, on pose tout d'abord $M_S = I$. Le résidu total R_t devient

$$\begin{aligned} R_t &= M_K - I + M_K^{-1} - I, \\ &= R \Lambda_K R^{-1} + R \Lambda_K^{-1} R^{-1} - 2I, \\ &= R(\Lambda_K + \Lambda_K^{-1} - 2I)R^{-1}, \\ &= R((\Lambda_K - I)^2 \Lambda_K^{-1}) R^{-1}. \end{aligned}$$

La non-conformité \mathcal{E}_K de l'équation 3.13) devient

$$\mathcal{E}_K = \sqrt{\text{tr}(R_t^T R_t)}, = \sqrt{\text{tr}\left(R \left((\Lambda_K - I)^2 \Lambda_K^{-1}\right)^2 R^{-1}\right)} \quad (3.25)$$

puisque $\Lambda^T = \Lambda$ et que $R^{-1} = R^T$. Ceci peut se simplifier en

$$\mathcal{E}_K = \sqrt{\sum_i ((\lambda_{K,i} - 1)^2 / \lambda_{K,i})^2}, \quad (3.26)$$

où $\lambda_{K,i}$ sont les termes de la diagonale de Λ_K . On voit donc que dans le cas d'une cible représentant un triangle équilatérale, la non-conformité donnée à l'équation 3.26 ressemble au conditionnement κ donné à l'équation 3.24. La différence est que la non-conformité est sensible à la carte de taille. On peut avoir un aperçu de ceci en posant $M_S = \Lambda_S$, i.e. en posant $R = I$ dans la décomposition $M = R\Lambda R^{-1}$. De plus, on peut faire de même pour M_K , i.e. considérer les simplexes qui ont $M_K = \Lambda_K$. On a alors

$$\begin{aligned} R_t &= M_S^{-1} M_K - I + M_K^{-1} M_S - I, \\ &= \Lambda_S^{-1} \Lambda_K - I + \Lambda_K^{-1} \Lambda_S - I, \\ &= (\Lambda_S - \Lambda_K)^2 \Lambda_K^{-1} \Lambda_S^{-1}. \end{aligned}$$

La non-conformité \mathcal{E}_K de l'équation 3.13 devient alors

$$\mathcal{E}_K = \sqrt{\sum_i \left(\frac{(\lambda_{K,i} - \lambda_{S,i})^2}{\lambda_{K,i} \lambda_{S,i}} \right)^2}. \quad (3.27)$$

Cette équation est clairement une généralisation de l'équation 3.26 qui tient compte de la carte de taille.

3.1.7 Non-conformité du maillage

La mesure de non-conformité peut se généraliser à tout le maillage à l'aide de la formule :

$$\mathcal{E}_{\mathcal{T}} = \frac{1}{n_K} \sum_{i=1}^{n_K} \mathcal{E}_{K_i}, \quad (3.28)$$

ce qui est la valeur moyenne de la non-conformité. En tenant compte du nombre d'éléments dans la mesure, on réussit à obtenir une mesure qui permet de comparer des maillages indépendamment du nombre d'éléments de ces maillages. Par exemple, soit un domaine tri-

angulaire équilatéral dont les arêtes mesurent deux unités et soit une métrique cible donnée par la matrice identité ($M_S = I$). Le maillage parfait pour ce problème existe et consiste en quatre triangles équilatéraux unitaires, tel que présenté à la figure 3.4(b). Ce maillage est parfaitement conforme aux spécifications de la carte de taille. Par ailleurs, soit les deux maillages suivants, l'un composé d'un seul triangle tel que représenté à la figure 3.4(a), et l'autre composé de seize triangles équilatéraux tel que représenté à la figure 3.4(c). Dans le cas du maillage composé d'un seul élément, le triangle est trop grand et le maillage n'est pas conforme aux spécifications de la carte de taille. Le coefficient de non-conformité de ce maillage, tel que mesuré par les équations 3.28 et 3.13, donne

$$\mathcal{E}_{\Omega_1} = \mathcal{E}_{K_1} = \frac{9}{4}\sqrt{2}, \quad (3.29)$$

puisque $M_K = \text{diag}(1/4, 1/4)$ dans le cas d'un triangle dont les arêtes mesurent deux unités. Dans le cas du maillage composé de seize triangles, tous les triangles sont trop petits. Chaque triangle a un coefficient de non-conformité donné par

$$\mathcal{E}_{\Omega_{16}} = \frac{1}{16} \sum_{i=1}^{16} \mathcal{E}_{K_i} = \frac{9}{4}\sqrt{2}, \quad (3.30)$$

selon les équations 3.28 et 3.13 avec $M_K = \text{diag}(4, 4)$ dans le cas d'un triangle dont les arêtes mesurent 1/2 unité.

On voit donc que $\mathcal{E}_{\Omega_1} = \mathcal{E}_{\Omega_{16}}$. C'est donc dire que ces deux maillages ont la même valeur moyenne du coefficient de non-conformité. Ceci les rend équivalents dans le sens où ces deux maillages sont aussi non-conforme l'un que l'autre.

Le coefficient de non-conformité d'un maillage est donc insensible à une mise à l'échelle compatible du maillage et de la carte de taille. Aussi, le coefficient de non-conformité est capable de comparer des maillages de deux domaines complètement différents, par exemple

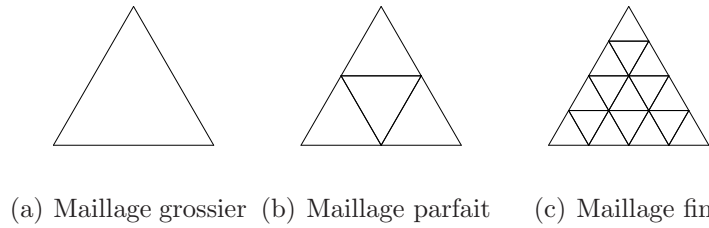


Figure 3.4 Si le maillage cible est le maillage du milieu, le coefficient de non-conformité du premier et du dernier maillage sont équivalents.

le maillage d'un océan et le maillage d'un nano-circuit. Dans les deux cas, la mesure de non-conformité du maillage donne un chiffre permettant de dire à quel point le maillage correspond à la carte de taille.

La non-conformité du maillage est une mesure unique et adimensionnelle qui mesure à quel point un maillage respecte les spécifications de la carte de taille donnée sous forme d'un espace métrique, qu'elle soit isotrope ou anisotrope. Cette mesure est valide pour les triangles, les tétraèdre et tous les autres éléments non-simpliciaux.

3.1.8 Exemples numériques

Finalement, on valide que la non conformité peut évaluer la qualité d'un maillage dont la carte de taille est donnée sous forme analytique. On utilise les cas tests de George et Borouchaki (1997).

Le premier cas test est une métrique Riemannienne isotrope donnée par :

$$M_S = \begin{pmatrix} h_1^{-2}(x, y) & 0 \\ 0 & h_2^{-2}(x, y) \end{pmatrix}, \quad (3.31)$$

où $h_1(x, y) = h_2(x, y) = h(x, y)$ est donné par :

$$h(x, y) = \begin{cases} 1 - 19y/40 & \text{si } y \in [0, 2], \\ 20^{(2y-9)/5} & \text{si } y \in]2, 4.5], \\ 5^{(9-2y)/5} & \text{si } y \in]4.5, 7], \\ \frac{1}{5} + \frac{4}{5} \left(\frac{y-7}{2} \right)^4 & \text{si } y \in]7, 9]. \end{cases} \quad (3.32)$$

Le maillage adapté est calculé par **OORT** (Object-Oriented Remeshing Toolkit), un optimiseur de maillages développé par l'École Polytechnique au CERCA. L'optimiseur raffine, déraffine, déplace et bascule des arêtes. Le maillage adapté est présenté à la figure 3.5(a). Le tableau 3.1 présente les valeurs statistiques de la longueur des arêtes et du critère η donné à l'équation 1.24. Ces valeurs sont mesurées dans la métrique de la carte de taille. Le coefficient de non-conformité (tel que donné à l'équation 3.28) de ce maillage par rapport à la carte de taille dessinée à la figure 3.5(b) est $\mathcal{E}_T = 0.1041$. On présente deux autres maillages afin d'évaluer le critère de non-conformité. Le maillage de la figure 3.5(c) est obtenu en fixant une cible où toutes les arêtes mesureront 1.4 selon la carte de taille au lieu de cibler des arêtes de longueur 1.0. Tous les éléments seront dès lors trop grands, tel qu'illustré par le fait que l'arête de la frontière du bas est discrétisée en 5 segments au lieu de 7 segments pour le maillage de la figure 3.5(a). La non-conformité du maillage présenté à la figure 3.5(c) par rapport à la carte de taille présentée à la figure 3.5(b) est $\mathcal{E}_T = 3.82$. Le maillage de la

figure 3.5(d) présente un maillage structuré concentré selon l'axe y de façon à respecter la carte de taille. Le maillage structuré est ensuite divisé en triangles. La densité du maillage résultant est trop faible quand la diagonale est à un angle inférieur à 45 degrés, et la densité est trop élevée quand l'angle de la diagonale est supérieur à 45 degrés. La non-conformité du maillage de la figure 3.5(d) par rapport à la carte de taille illustrée à la figure 3.5(b) est $\mathcal{E}_{\mathcal{T}} = 12.1$.

3.1.9 Cas test anisotrope

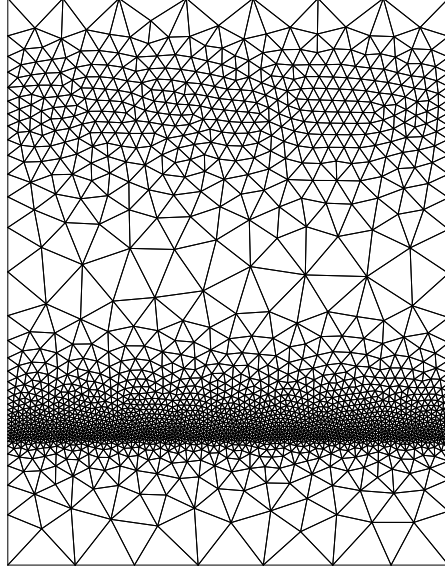
Le deuxième cas test est anisotrope et le tenseur métrique est spécifié par l'équation 3.31, où $h_1(x, y)$ et $h_2(x, y)$ sont donnés par :

$$h_1 = \begin{cases} 1 - 19x/40 & \text{si } x \in [0, 2], \\ 20^{(2x-7)/3} & \text{si } x \in]2, 3.5], \\ 5^{(7-2x)/3} & \text{si } x \in]3.5, 5], \\ \frac{1}{5} + \frac{4}{5} \left(\frac{x-5}{2} \right)^4 & \text{si } x \in]5, 7], \end{cases} \quad h_2 = \begin{cases} 1 - 19y/40 & \text{si } y \in [0, 2], \\ 20^{(2y-9)/5} & \text{si } y \in]2, 4.5], \\ 5^{(9-2y)/5} & \text{si } y \in]4.5, 7], \\ \frac{1}{5} + \frac{4}{5} \left(\frac{y-7}{2} \right)^4 & \text{si } y \in]7, 9]. \end{cases} \quad (3.33)$$

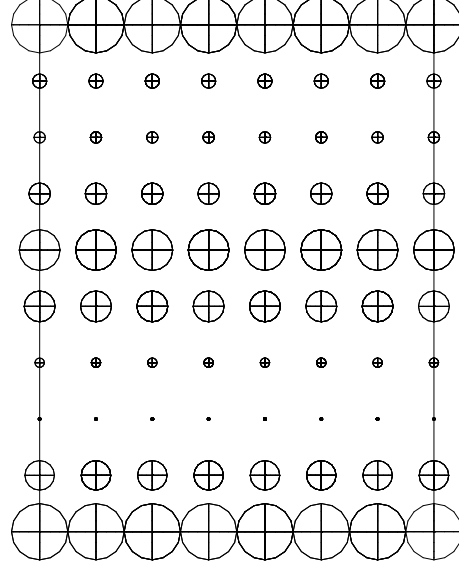
On utilise **OORT** pour obtenir les maillages adaptés présentés à la figure 3.6. Le tableau 3.2 présente les indicateurs de qualité évalués en tenant compte du tenseur métrique de la carte de taille. Le coefficient de non-conformité (Eq. 3.28) de ce maillage par rapport à la carte de taille présenté à la figure 3.6(b) est $\mathcal{E}_{\mathcal{T}} = 0.146$. Deux autres maillages sont présentés afin d'illustrer le comportement de la mesure de non-conformité dans le cas de maillages anisotropes. Le maillage présenté à la figure 3.6(c) est obtenu en ciblant un maillage dont les arêtes mesurent 1.5 dans la carte de taille. Tous les éléments de ce maillage sont donc trop grands, ce qui se vérifie par le fait que l'arête au bas du domaine est divisée en 17 segments au lieu de 23 dans le cas du maillage de la figure 3.6(a). La non-conformité du maillage présenté dans la figure 3.6(c) par rapport à la carte de taille présentée à la figure 3.6(b) est $\mathcal{E}_{\mathcal{T}} = 1.93$. Le maillage à la figure 3.6(d) présente un maillage adapté en désactivant la relocalisation des sommets. Le maillage adapté a la bonne taille, mais la forme des éléments est perfectible. La

Tableau 3.1 Indicateurs de qualité évalués dans la métrique spécifiée par l'équation 3.32 pour le maillage illustré à la figure 3.5(a).

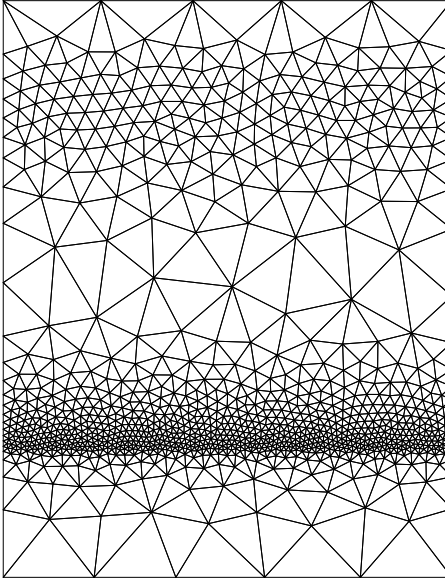
Indicateur	Nb d'items	Min	Moyenne	Max	Écart type
Longueur d'arête	6326	0.789	0.998	1.31	0.076
η	4189	0.880	0.982	1.00	0.018



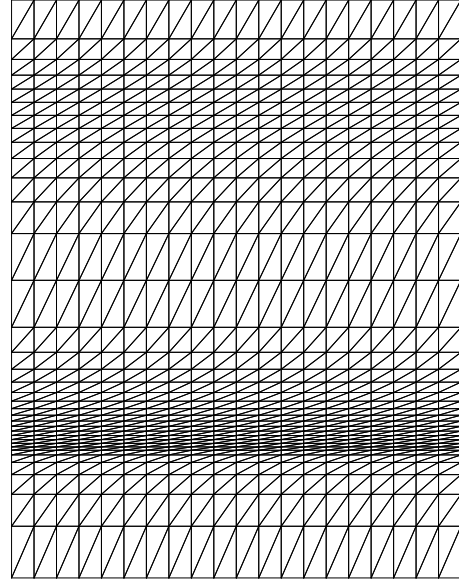
(a) Maillage optimisé. $\mathcal{E}_{\mathcal{T}} = 0.1041$.



(b) Carte de taille.



(c) Bonne forme, mauvaise taille. $\mathcal{E}_{\mathcal{T}} = 3.82$.



(d) Maillage structuré divisé en triangles. $\mathcal{E}_{\mathcal{T}} = 12.1$.

Figure 3.5 Maillages obtenues avec la métrique isotrope donnée à l'équation 3.32.

mesure de non-conformité du maillage présenté à la figure 3.6(d) par rapport à la carte de taille présentée à la figure 3.6(b) est $\mathcal{E}_{\mathcal{T}} = 0.63$.

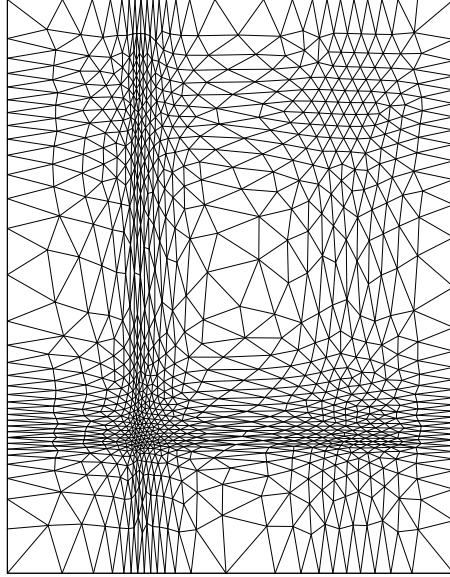
Une des propriétés intéressante de la mesure de non-conformité est son invariance par rapport à la mise à l'échelle. Ainsi, le coefficient de non-conformité du maillage ne change pas si le domaine est agrandi en un rectangle de $[0, 70] \times [0, 90]$, donc dix fois plus gros, du moment que la carte de taille soit mise à l'échelle par un facteur correspondant.

Une autre propriété intéressante est que la mesure de non conformité du maillage permet de comparer différents maillages adaptés qui satisfont des carte de tailles différentes. Ainsi, les deux maillages à la figure 3.5 et à la figure 3.6 sont très différents, puisque ces maillages ont des cartes de tailles différentes. Mais comme ces maillages ont été adaptés avec la même librairie qui utilise la même heuristique, ces deux maillages ont des coefficients de non-conformité qui sont comparables. On peut donc conclure que l'heuristique utilisée par **OORT** est peu influencée par la nature isotrope ou anisotrope de la carte de taille.

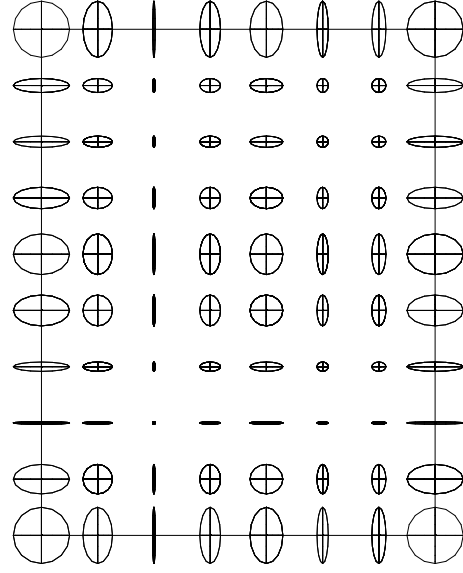
On voit donc que la mesure de non-confrmité présentée dans cette section est une contribution originale qui permet de mesurer la conformité d'un simplexe par rapport aux spécifications en taille et en orientation contenues dans la carte de taille.

Tableau 3.2 Indicateurs de qualité évalués dans la métrique spécifiée par l'équation 3.33 pour le maillage illustré à la figure 3.6.

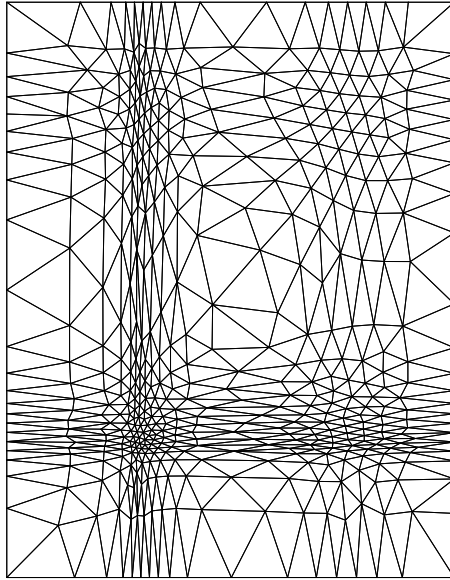
Indicateur	Nb d'items	Min	Moyenne	Max	Écart type
Longueur d'arête	3238	0.768	1.022	1.35	0.071
η	2119	0.806	0.985	1.00	0.020



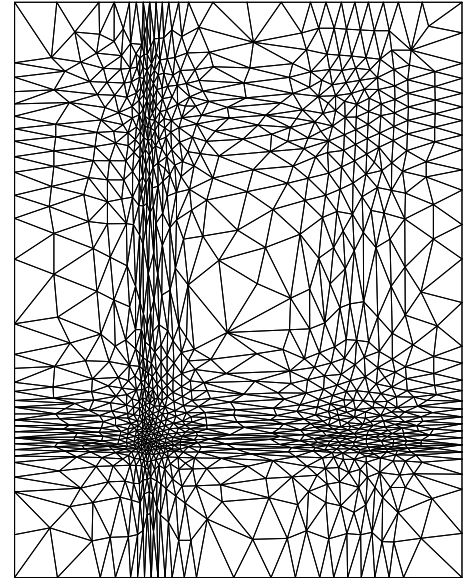
(a) Maillage optimisé. $\mathcal{E}_{\mathcal{T}} = 0.146$.



(b) Carte de taille.



(c) Bonne forme, mauvaise taille. $\mathcal{E}_{\mathcal{T}} = 1.93$.



(d) Bonne taille, mauvaise forme. $\mathcal{E}_{\mathcal{T}} = 0.63$.

Figure 3.6 Maillages obtenus avec la métrique anisotrope donnée à l'équation 3.33.

3.2 Vérification

Lors de la mise en oeuvre d'un processus adaptatif, l'approche scientifique recommande d'appliquer une méthodologie rigoureuse de vérification au processus. Roache (1998) propose plusieurs techniques de vérification pour la CFD. L'application aux processus adaptatifs nécessite d'identifier clairement les composantes à vérifier et les mesures à utiliser. Bien qu'on ait recensé plusieurs implémentations de processus adaptatif dans la littérature, on ne retrouve pas d'endroit où l'emphase est mise sur des mesures rigoureuses de l'équirépartition de l'erreur d'approximation et sur la vérification du processus d'adaptation. Cette section est la synthèse de l'article en annexe B qui propose de tels mesures et qui décrit une méthodologie rigoureuse de vérification du processus adaptatif.

3.2.1 Equirépartition de l'erreur d'approximation

Les processus adaptatifs ont pour but d'équirépartir l'erreur d'approximation. Cette notion d'équirépartition provient du théorème minimax utilisé en théorie de l'approximation telle que présentée à la section 1.1.4 et qui stipule que la meilleure approximation par une interpolation est atteinte quand on minimise la distance maximum entre l'interpolation et la fonction exacte. Par extension, dans le cas d'un maillage éléments finis, la meilleure approximation est atteinte quand tous les éléments ont la même norme élémentaire L_∞ . Comme le maillage parfait n'est jamais atteint en pratique, on propose d'utiliser des indicateurs statistiques afin de caractériser la population des valeurs de la norme élémentaire infinie de l'erreur d'approximation. On suggère donc de calculer la moyenne et l'écart type de cette population. La valeur moyenne de la norme infinie élémentaire de l'erreur d'approximation devrait théoriquement converger de façon quadratique. L'écart type devient alors un indicateur de l'efficacité du processus à équirépartir l'erreur d'approximation. Le coefficient de variation permet de comparer deux processus ayant des moyennes différentes en adimensionnalisant l'écart type par rapport à la moyenne de la population, i.e. $c_v = \sigma/\mu$ où c_v est le coefficient de variation, μ est la moyenne et σ est l'écart type.

3.2.2 Solutions manufacturées

On s'inspire des techniques de solution manufacturées telles que présentées dans Pelletier et Roache (2002) ainsi que dans Roache (1998). On définit donc des expériences numériques dont la solution analytique existe. Ceci permettra de mesurer exactement l'erreur d'approximation. De plus, cette approche permet de rendre l'analyse indépendante d'un solveur quelconque en travaillant directement avec l'erreur d'interpolation. En effet, si on inclut un solveur de type élément finis dans le processus, il faudrait le vérifier lui aussi. Or, si le solveur fonc-

tionne correctement, les valeurs nodales devraient converger rapidement dans le cas d'un problème de type Laplacien.

Les solutions manufacturées choisies sont représentatives des problèmes d'ingénierie, particulièrement orienté pour correspondre aux phénomènes anisotropes qui apparaissent dans les couches limites des écoulements turbulents. En deux dimensions, on choisit le carré unitaire $[0, 1] \times [0, 1]$. En trois dimensions, on choisit le cube unitaire $[0, 1] \times [0, 1] \times [0, 1]$. On choisit le problème défini par Apel *et al.* (2004) afin de représenter des phénomènes anisotropes. On a donc :

$$\begin{cases} -\Delta u + k^2 u = 0 & \text{dans } \Omega \\ u = g & \text{sur } \partial\Omega, \end{cases} \quad (3.34)$$

où les conditions frontières g sont définies de telle sorte que la solution analytique soit donnée par :

$$u = \begin{cases} e^{-kx} + e^{-ky} & \text{en 2D,} \\ e^{-kx} + e^{-ky} + e^{-kz} & \text{en 3D.} \end{cases} \quad (3.35)$$

Telle qu'illustrée à la figure 3.7, cette solution est très anisotrope près des parois quand k est élevé. On choisit les valeurs $k = 10$ et $k = 100$ pour étudier l'impact de l'anisotropie sur le processus adaptatif.

3.2.3 Vérification de la reconstruction du Hessien

L'estimateur d'erreur est basé sur une reconstruction du Hessien. On vérifie rigoureusement la reconstruction à l'aide des normes définies dans Vallet *et al.* (2007) en faisant des graphes de convergence pour les cartes de tailles choisies. On mesure la différence entre le Hessien exacte H et la reconstruction H_h en utilisant la norme L^1 – du maximum de la valeur absolue de la somme des colonnes de $H - H_h$, telle que définit dans Vallet *et al.* (2007). On trace donc les graphes de convergence de

$$\|H - H_h\|_1 = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \left(\max_{j=1, \dots, d} \sum_{k=1}^d \left| H^{jk}(X_i) - H_h^{jk}(X_i) \right| \right) \quad (3.36)$$

où d est la dimension de l'espace, N est le nombre de noeuds et les X_i sont les positions des sommets. On peut ainsi tracer les graphes de convergence de la figure 3.8, qui montrent le comportement attendu dans le cas de la reconstruction du Hessien.

3.2.4 Cartes de tailles et stratégies d'adaptations

On désire comparer des maillages uniformes, des maillages adaptés de façon isotrope et des maillages adaptés de façon anisotrope. On utilise donc des cartes de taille données sous

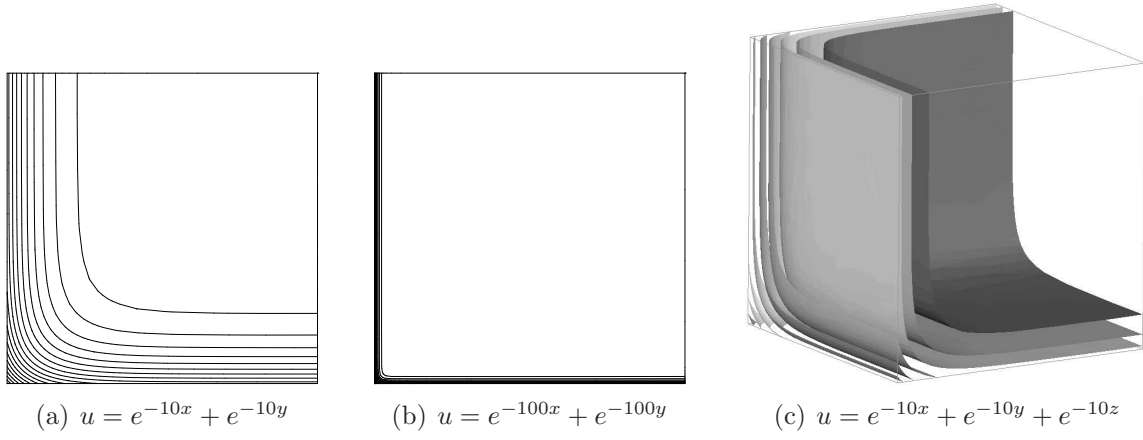


Figure 3.7 Isocontours de la solution des cas tests de réaction-diffusion.

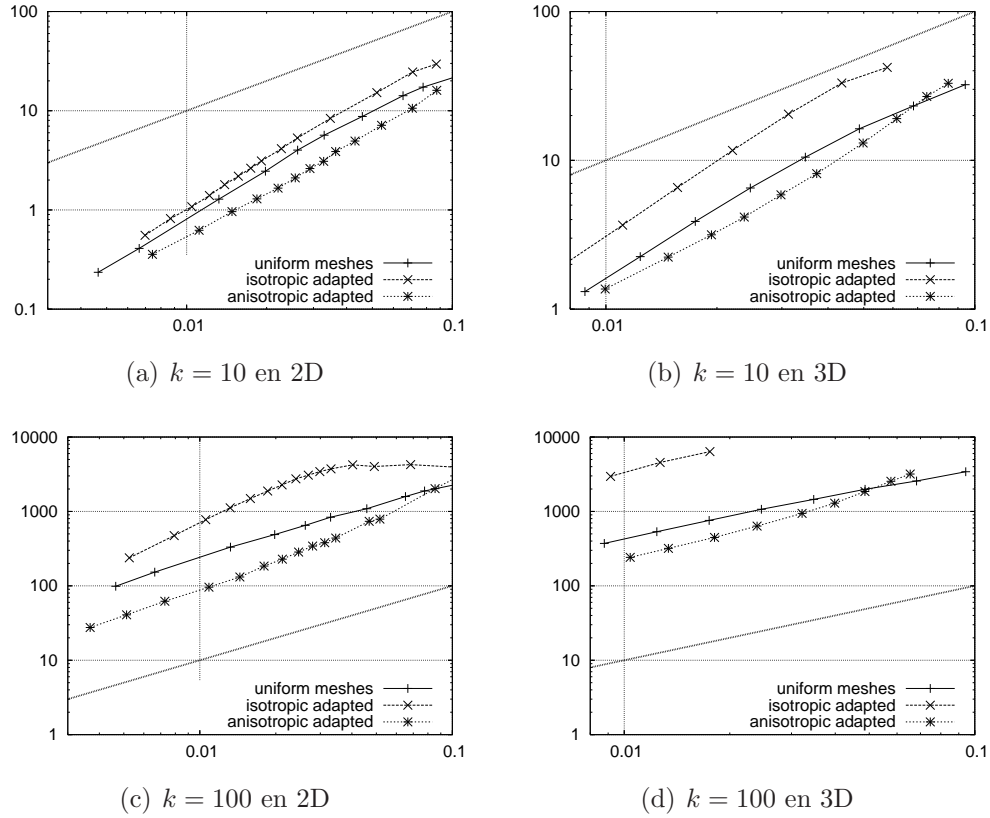


Figure 3.8 Convergence du Hessien reconstruit pour le cas test du problème de réaction-diffusion.

formes de tenseurs métriques. Ce type de carte de taille est utilisé de façon courante pour les maillages anisotropes. Dans le cas des maillages isotropes, il faut changer les valeurs propres des tenseurs, de façon à ce que les valeurs propres soient égales entre elles. Dans le cas des maillages uniformes, il faut que les tenseurs soient constants à travers tout le domaine.

On peut ainsi utiliser la librairie **OORT** pour générer tous les maillages, que ce soit pour les cartes de taille uniformes, isotropes ou anisotropes.

3.2.5 Modification de maillage

Le maillage adapté est obtenu par **OORT** en modifiant un maillage initial existant de façon à ce qu'il corresponde aux spécifications de la carte de taille. Dans **OORT** le raffinement se fait en scindant les arêtes du maillages qui sont trop longues dans l'espace métrique. Comme noté à la section 2.3.4, les maillages produits par cette opération possèdent des sommets sousconnectés. Cette étape est donc suivi de basculement afin d'améliorer le maillage. Le déraffinement, lui, se fait dans **OORT** en implosant les arêtes du maillage qui sont trop courtes dans l'espace métrique par l'analogie du sommet meurtrier. Encore une fois, le maillage est ensuite lissé topologiquement puisque le déraffinement produit des maillages surconnectés. Le déplacement des sommets dans **OORT** utilise une analogie de ressorts raides par la longueur métrique des arêtes. Finalement, le basculement des arêtes est effectué dans **OORT** avec l'algorithme récursif par division bipariétale présenté à la section 4.2. Cet algorithme trouve la connectivité qui maximise la qualité minimum des tétraèdres de la boule formée par les tétraèdres qui partagent l'arête sous observation. Cet algorithme a la particularité de terminer rapidement dans les cas où il n'y a pas de connectivité qui soit meilleure que le maillage de départ de la boule.

L'heuristique global de **OORT** est donc :

1. Boucle sur toutes les arêtes et raffine les arêtes trop grandes
 - (a) Bascule les arêtes des faces opposées au nouveau sommet
 - (b) Lisse les coordonnées des sommets affectés
2. Boucle sur toutes les arêtes et déraffine les arêtes trop courtes
 - (a) Bascule les arêtes connectées au sommet meurtrier
 - (b) Lisse les coordonnées des sommets affectés
3. Bascule toutes les arêtes
4. Lisse les coordonnées de tous les sommets

On répète ces opérations un nombre fixe de fois.

3.2.6 Vérification du calcul du maillage adapté à la carte de taille

La figure 3.9 présente l'historique de la non-conformité du maillage \mathcal{E}_T pendant l'adaptation du maillage pour le cas test dont la carte de taille est donnée à l'équation 3.35 pour $k = 10$ en 2D alors que le remaillleur transforme le maillage de la figure 3.10(a) afin d'obtenir le maillage de la figure 3.10(b). On y présente aussi le nombre d'éléments durant les cycles d'adaptation. Le coefficient de non-conformité est initialement 79.51. Il croît de façon significative dans les premières étapes d'adaptation et décroît brusquement autour de la 10ième itération pour finalement converger autour de 0.25. Les oscillations dans les courbes montrent que les opérations de raffinement et de déraffinement produisent des maillages qui sont respectivement sous connectés et sur connectés. Ces opérations doivent être suivi de basculement des arêtes afin de lisser topologiquement le maillage. De plus, on voit qu'après l'itération 15, les opérations ne parviennent plus à améliorer le maillage.

Le remaillleur termine après un nombre fixe d'itérations ou lorsque l'écart type adimensionnelle de la longueur métrique des arêtes chute sous une certaine tolérance. Cependant, détecter la décroissance rapide de la non-conformité et la stabilisation de la non-conformité serait aussi une façon judicieuse de détecter la convergence du remaillleur.

3.2.7 Vérification de l'équirépartition de l'erreur d'approximation

Finalement, une boucle adaptative appelle itérativement le solveur et le remaillleur afin de converger vers un couple maillage-solution qui équitribue l'erreur d'interpolation. On vérifie l'ensemble du processus adaptatif en mesurant la norme max de l'erreur d'approximation et en suivant l'évolution de la moyenne et de l'écart type de la norme max de l'erreur d'approximation. Quand la moyenne et l'écart type convergent mal, des histogrammes de la norme max de l'erreur d'approximation permettent de déterminer le biais dans la population. On peut ensuite visualiser la norme max de l'erreur d'approximation afin de voir si des régions cohérentes dévient d'un comportement normal afin de trouver les sources d'ennuis. Il est important de noter que les graphes et les statistiques de la norme $L2$ ne permettent pas d'identifier les zones où se situent les problèmes.

Dans le cas d'une interpolation linéaire, le taux de convergence de l'erreur d'inteprolation est donnée par

$$\|u - \Pi_h u\|_{L^2(\Omega)} \leq Ch^2 |u|_{H^2(\Omega)} \quad (3.37)$$

où la semi norme H^2 est la norme de Frobenius du Hessien. La longueur caractéristique h du

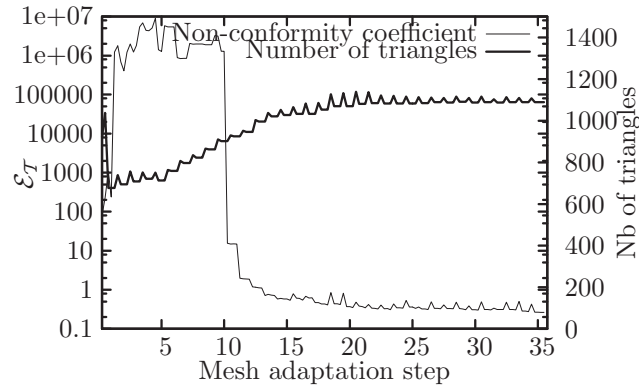


Figure 3.9 Réduction de $\mathcal{E}_{\mathcal{T}}$ et stabilisation du nombre d'éléments durant le processus d'adaptation menant au maillage de la figure 3.10.

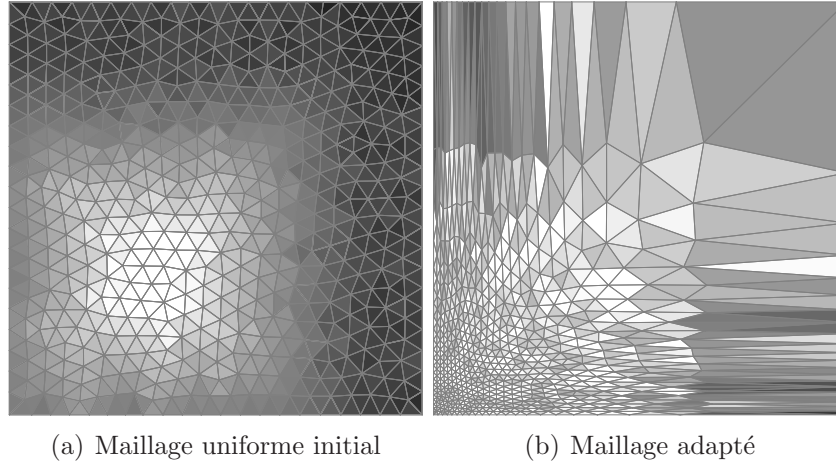


Figure 3.10 Adaptation du maillage pour le problème donné à l'équation 3.35 (coloré par le coefficient de non-conformité).

maillage est calculée à l'aide de

$$h = \begin{cases} (A_\Omega/N)^{1/2} & \text{en 2D,} \\ (V_\Omega/N)^{1/3} & \text{en 3D,} \end{cases} \quad (3.38)$$

où A_Ω est l'aire du domaine Ω , V_Ω est le volume du domaine et N est le nombre d'éléments. La norme L^2 de l'erreur d'interpolation sur le domaine Ω est définie à partir de l'erreur élémentaire à l'aide de l'équation suivante :

$$\|u - \Pi_h u\|_{L^2(\Omega)} = \left(\sum_{K \in T_h} \int_K (u - \Pi_h u)^2 dK \right)^{1/2} = \left(\sum_{K \in T_h} \|u - \Pi_h u\|_{L^2(K)}^2 \right)^{1/2}. \quad (3.39)$$

où, $\|u - \Pi_h u\|_{L^2(K)}$ est l'erreur d'interpolation en norme L^2 sur l'élément K . Cette intégrale est approximée numériquement par une règle de quadrature de Gauss.

De façon similaire, la norme L^∞ de l'erreur d'interpolation sur le domaine Ω est donnée par

$$\|u - \Pi_h u\|_{L^\infty(\Omega)} = \max_{x \in \Omega} |u - \Pi_h u| = \max_{K \in T_h} \left(\max_{x \in K} |u - \Pi_h u| \right) = \max_{K \in T_h} \|u - \Pi_h u\|_{L^\infty(K)}. \quad (3.40)$$

Ici aussi, on approxime le maximum de $|u - \Pi_h u|$ à l'aide d'une règle de quadrature.

Finalement, on quantifie l'équirépartition en regardant l'écart type des normes élémentaires de l'erreur d'interpolation. Le coefficient de variation peut ensuite servir pour comparer des écarts types quand la valeur moyenne varie.

Cas test bidimensionnel avec $k = 10$

La figure 3.11 présente les résultats des tests de convergence pour le cas 2D avec $k = 10$. Les figures 3.11(a) à 3.11(c) montrent des maillages dont les caractéristiques sont données dans le tableau 3.3.

Les figures 3.11(d) et 3.11(e) montrent que l'adaptation anisotrope réduit de façon signi-

Tableau 3.3 Caractéristiques des maillages de la figure 3.11.

Type	Figure	Nb de sommets	Nb de triangles	$\ u - \Pi_h u\ _{L^2(\Omega)}$
Uniforme	3.11(a)	503	922	6.12e-03
Isotrope	3.11(b)	466	828	3.30e-03
Anisotrope	3.11(c)	508	930	1.11e-03

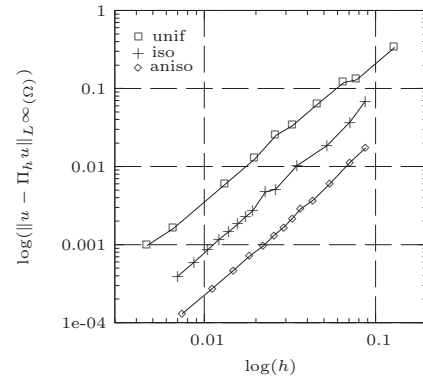
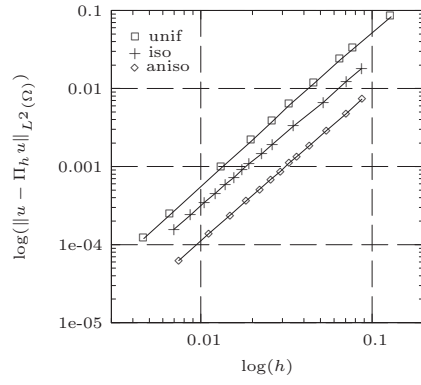
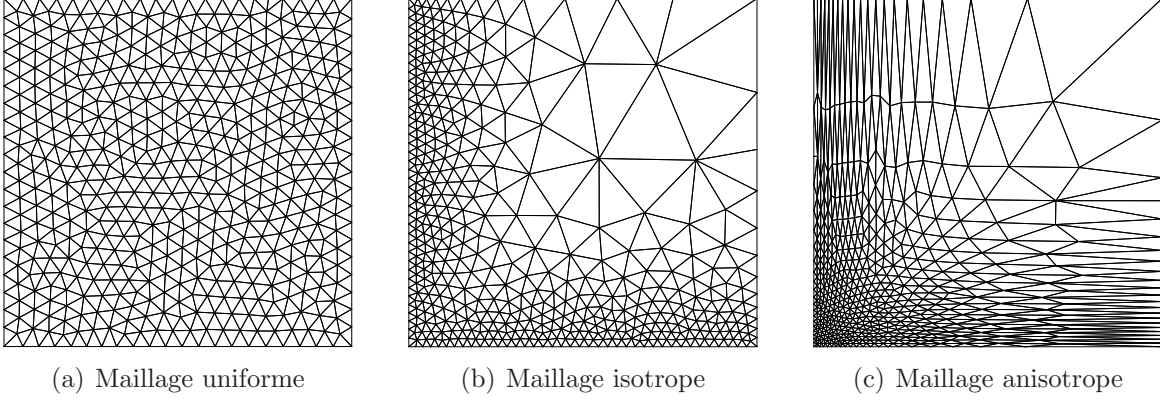


Figure 3.11 Résultats pour le cas test de réaction-diffusion avec $k = 10$ dans un carré.

ficative l'erreur d'interpolation en norme L^2 et en norme L^∞ . Dans ces figures, la courbe du haut montre la convergence de l'erreur pour les maillages uniformes, la courbe du milieu montre la convergence des maillages isotropes et la courbe du bas montre la convergence des maillages anisotropes. Le taux de convergence de ces méthodes est quadratique, mais les maillages anisotropes sont beaucoup plus précis pour une taille h fixe. On voit donc que le processus adaptatif réduit de façon significative l'erreur d'interpolation en norme L^2 et en norme L^∞ .

La figure 3.12 montre des histogrammes de l'erreur d'interpolation élémentaire en norme L^∞ pour les maillages les plus fins disponibles en uniforme, isotrope et anisotrope. Ces maillages ont 46 336, 20 566 et 18 092 triangles respectivement. Les histogrammes présentent le pourcentage de triangles et l'abscisse est adimensionnée par la moyenne. Cette figure montre que l'adaptation anisotrope équitribue l'erreur d'interpolation élémentaire en norme L^∞ puisque le processus contrôle l'écart type de ces valeurs.

La figure 3.13 montre la convergence de l'écart type de l'erreur d'interpolation élémentaire en norme L^∞ . L'écart type converge pour les maillages uniformes puisqu'il y a plus d'éléments avec une petite erreur que d'éléments avec une grande erreur à chaque niveau de raffinement. Le taux de convergence pour les maillages isotropes est semblable, mais l'équirépartition est meilleure puisque l'écart type est plus petit. La convergence des maillages anisotropes est légèrement plus accentuée, et l'équirépartition est encore meilleure que pour les maillages isotropes et uniformes. Cette figure permet de conclure que le processus adaptatif équitribue l'erreur d'interpolation élémentaire en norme L^∞ .

Cas test tridimensionnel

La figure 3.14 montre les résultats pour le cas test tridimensionnel avec $k = 100$. La figure 3.14(a) montre un maillage uniforme, la figure 3.14(b) montre un maillage isotrope et la figure 3.14(c) montre un maillage anisotrope. Ces trois maillages sont presque équivalents en terme d'erreur d'interpolation en norme L^2 tel que présenté dans le tableau 3.4. Le maillage uniforme a environ 700 000 sommets, le maillage isotrope a environ 100 000 sommets et le maillage anisotrope a moins de 1 500 sommets.

Les maillages des figure 3.14(a), 3.14(b) et 3.14(c) ont environ la même erreur d'interpolation en norme L^2 . Cependant, on voit dans le tableau 3.4 que le maillage adapté a environ 600 fois moins d'éléments. Sur la figure 3.14(f), on voit que le maillage anisotrope équitribue l'erreur d'interpolation. Cependant, l'histogramme de la figure 3.15(c) montre que la distribution des erreurs d'interpolation élémentaires n'est pas régulière. Ceci indique que le processus adaptatif n'est pas capable d'équirépartir parfaitement l'erreur d'interpolation dans ce cas test très sévère. La méthodologie de vérification proposée permet donc de diagnostiquer ce

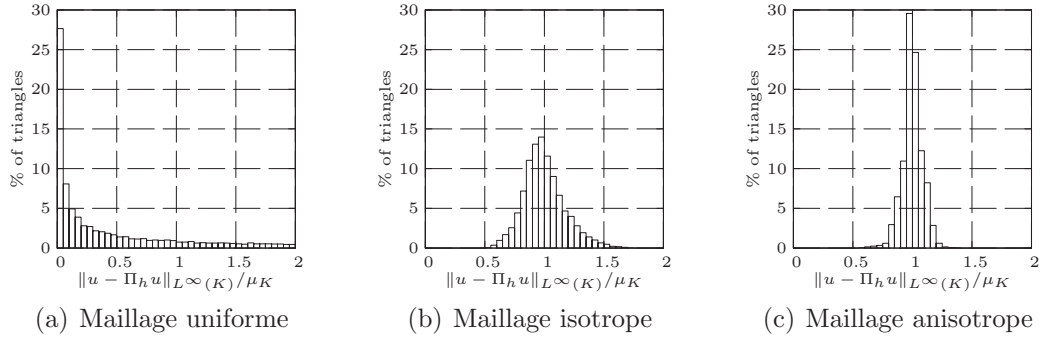


Figure 3.12 Histogrammes de l'erreur d'interpolation élémentaire adimensionnée en norme L^∞ pour le cas test de réaction-diffusion avec $k = 10$.

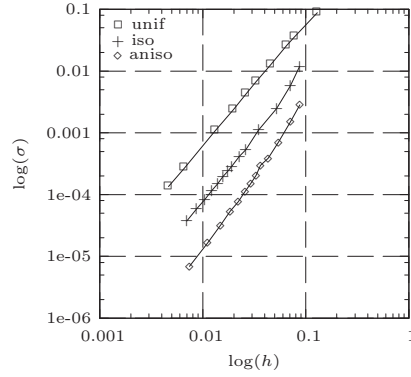


Figure 3.13 Écart type du cas test de réaction-diffusion avec $k = 10$.

Tableau 3.4 Caractéristiques des maillages de la figure 3.14.

Type	Figure	Nb de sommets	Nb de tétraèdres.	$\ u - \Pi_h u\ _{L^2(\Omega)}$
Uniforme	3.14(a)	733 697	4 178 360	9.01e-3
Isotrope	3.14(b)	116 682	515 676	1.33e-2
Anisotrope	3.14(c)	1 440	6 696	1.39e-2

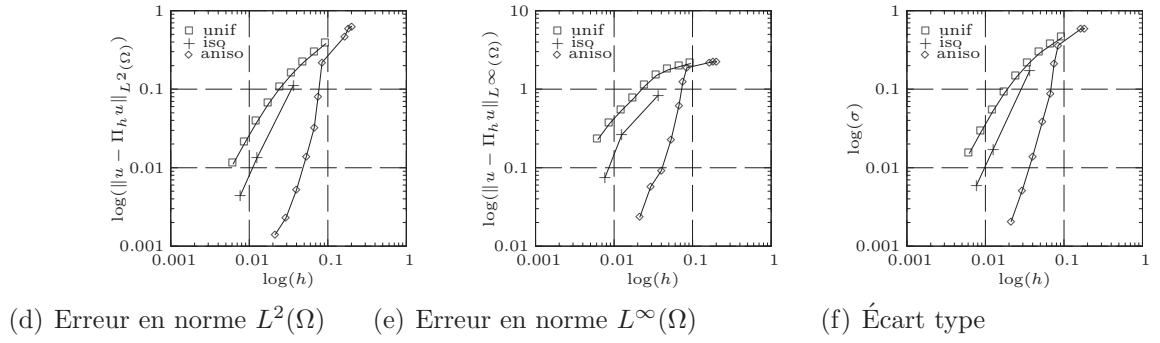
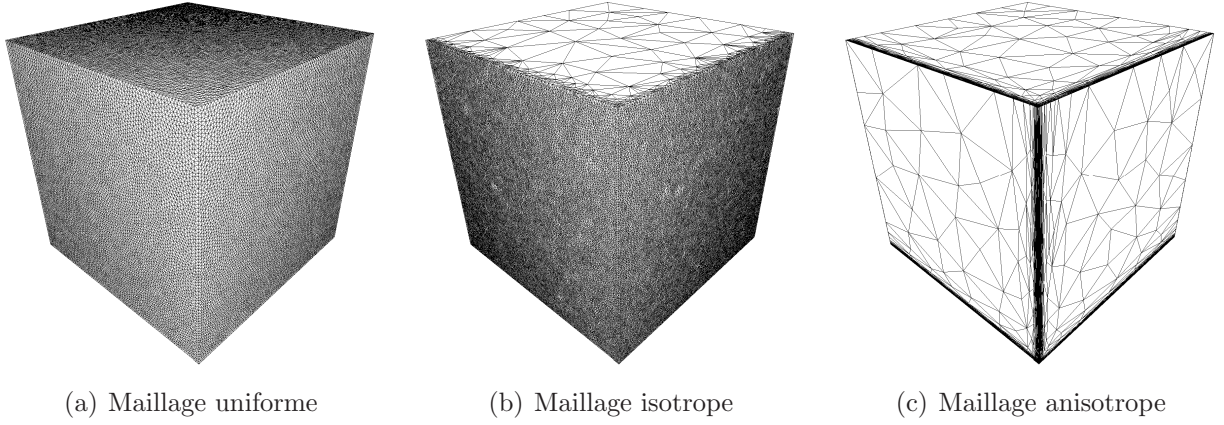


Figure 3.14 Résultats pour le cas test de réaction-diffusion avec $k = 100$ dans un cube unitaire.

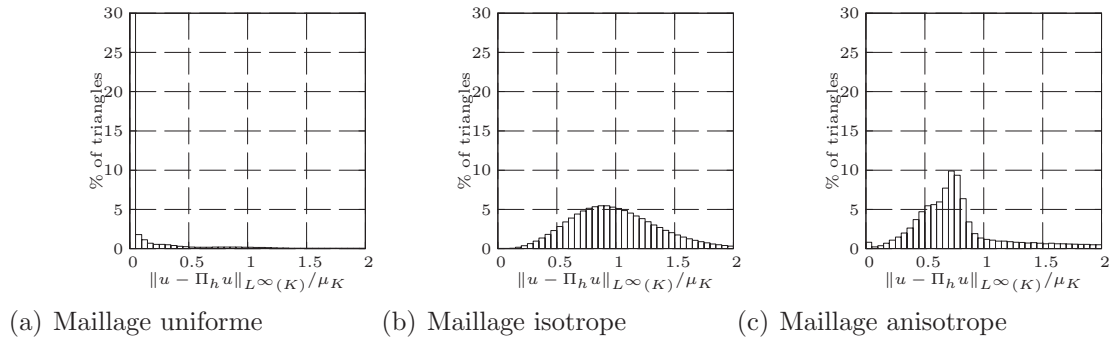


Figure 3.15 Histogrammes de l'erreur d'interpolation en norme L^∞ adimensionnée pour le cas test de réaction-diffusion avec $k = 100$ dans un cube unitaire.

problème alors que tous les autres indicateurs n'ont pas réussi à identifier ce problème.

Ce dernier cas test démontre que la méthodologie de vérification proposée permet d'identifier les limitations d'un processus d'adaptation et fournit les outils qui permettent de diagnostiquer les problèmes.

On conclut que les processus adaptatifs anisotropes sont très profitables quand les phénomènes sont anisotropes. L'adaptation anisotrope permet de réduire de façon importante le nombre d'éléments nécessaires pour atteindre une précision donnée.

CHAPITRE 4

RÉSULTATS COMPLÉMENTAIRES

D'autres résultats intéressants viennent compléter le travail accompli dans cette thèse. Notamment, l'intégration des technologies utilisées dans l'adaptation de maillage doit se faire par étapes. À l'IREQ, une de ces étapes est la mise en place d'un estimateur d'erreur capable d'évaluer objectivement la qualité des maillages en regard de la solution numérique calculée sur ce maillage. Cependant, afin de s'approprier cet outil, il faut être capable de communiquer l'information que l'estimateur calcule ainsi que l'évaluation objective que l'estimateur fait du maillage courant. Cette évaluation est déjà faite par les outils de remaillage lors du calcul du maillage adapté. Mais le remailleur est une boîte noire et les usagers ne voient que le maillage résultant. Or, lors de la mise en place d'un estimateur d'erreur, l'utilisateur désire précisément voir cette évaluation objective du maillage avant que le maillage ne soit modifié afin de comparer les estimateurs d'erreur entre eux.

De plus, le basculement d'arêtes est une opération importante lors du calcul du maillage tridimensionnel adapté par modification locale. On propose un algorithme de basculement récursif par division bipariétale afin de basculer efficacement les arêtes des maillages tridimensionnels. Cet algorithme parcourt efficacement les façons de reconnecter la boule formée par tous les tétraèdres qui partagent une même arête.

4.1 Visualisation des actions à effectuer

Le besoin de visualiser l'évaluation du maillage par l'estimateur d'erreur a mené à la mise en oeuvre d'outils de visualisation des directions principales des modifications à apporter au maillage. On présente donc ici la méthodologie et les résultats obtenus pour atteindre l'objectif de visualiser l'évaluation objective du maillage par un estimateur d'erreur anisotrope basé sur l'erreur d'interpolation d'un scalaire.

Tout d'abord, on présente le contexte des simulations numériques étudiées à l'IREQ. Le cas représentatif du diffuseur conique de l'expérience de Clausen est utilisé, car il a été très étudié et des résultats expérimentaux sont disponibles. On présente ensuite la modélisation Navier-Stokes moyenne (RANS) choisie et le modèle de turbulence par transport des contraintes de cisaillement (SST) utilisé pour la simulation de la turbulence. On compare ensuite les résultats avec les mesures expérimentales. On présente ensuite l'estimateur d'erreur choisi ainsi que la façon de visualiser l'information contenue dans le tenseur à l'aide d'ellipses. Ces

tenseurs peuvent se comparer aux métriques des transformations qui rendent les éléments réguliers à l'aide de la mesure de non-conformité présentée à l'équation 3.13. Cependant, on considère séparément les contributions de R_s et R_b présentées à l'équation 3.9 afin de différencier les éléments trop grands des éléments trop petits. On présente une façon originale de visualiser les tenseurs R_s et R_b à l'aide de la décomposition SVD de ces tenseurs. Cette décomposition permet de visualiser les actions principales que l'estimateur d'erreur veut faire sur le maillage afin de l'améliorer.

4.1.1 Diffuseur conique

L'ERCOFTAC possède une base de données de cas tests en CFD. Le cas test 60 (Case 60 : Swirling Boundary Layer in Conical Diffuser) a été très étudié à l'IREQ par Page *et al.* (1996, 1997) ainsi que par d'autres partenaires dont Nilsson *et al.* (2008) et Gyllenram et Nilsson (2006). Il s'agit d'une expérience menée par Clausen et Wood (1987); Clausen *et al.* (1993) afin de fournir des mesures expérimentales pour des écoulements internes en rotation avec une vitesse de rotation suffisante pour éviter le décollement.

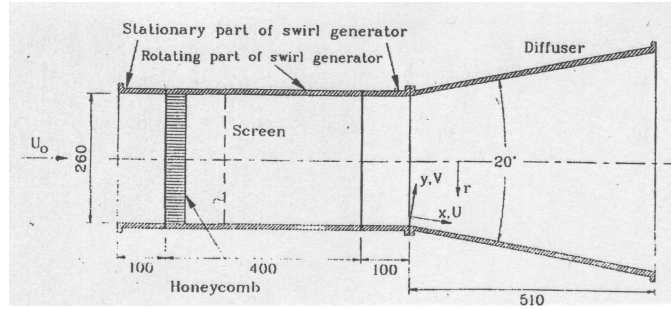


Figure 4.1 Géométrie du diffuseur conique (de Clausen *et al.* (1993)).

La figure 4.1 illustre la géométrie du montage expérimental. Dans l'expérience, une grille en aluminium en forme de nid d'abeilles a servi à mettre l'écoulement en rotation solide à l'entrée du diffuseur. Le diffuseur lui-même est un cône tronqué avec un angle d'ouverture de 20° . Pour le modèle numérique, on suit les recommandations de Gyllenram et Nilsson (2006) qui ajoute une section en amont permettant à l'écoulement de se développer de façon à correspondre aux données expérimentales à l'entrée. En effet, en ajoutant numériquement une section cylindrique dont les parois sont en rotation sur une longueur de 500mm en amont du diffuseur, on peut se permettre d'imposer des vitesses à l'entrée en rotation solide de 52.646 rad/s avec une vitesse axiale constante sur toute l'entrée de 11.6 m/s . Pour ce qui est de la condition de sortie, Bounos (2008) a étudié plusieurs configurations, et nous avons retenu

l'extension simple droite. Toutes ces données sont présentées sur le site wiki de OpenFOAM¹.

4.1.2 Modélisation CFD

On utilise le logiciel CFX version 12.1 pour faire les études numériques. Il s'agit d'un solveur volumes finis qui résout la formulation RANS des équations. En formulation stationnaire isotherme, on a :

$$\rho (\mathbf{U} \cdot \nabla \mathbf{U}) = -\nabla p + \mu \nabla^2 \mathbf{U} \quad (4.1)$$

$$\nabla \cdot (\rho \mathbf{U}) = 0 \quad (4.2)$$

On choisit le modèle de turbulence SST avec loi de parois afin de fermer le système d'équations. La documentation de ANSYS Inc. (2009) indique que le modèle $k - \omega$ est utilisé près des parois :

$$\nabla \cdot (\rho \mathbf{U} k) = \nabla \cdot \left[\left(\mu + \frac{\mu_t}{\sigma_{k1}} \right) \nabla k \right] + P_k - \beta' \rho k \omega \quad (4.3)$$

$$\nabla \cdot (\rho \mathbf{U} \omega) = \nabla \cdot \left[\left(\mu + \frac{\mu_t}{\sigma_{\omega 1}} \right) \nabla \omega \right] \quad (4.4)$$

$$+ \alpha_1 \frac{\omega}{k} P_k - \beta_1 \rho \omega^2 \quad (4.5)$$

où w est décrit dans Wilcox (1993). Loin des parois, CFX utilise le modèle $k - \epsilon$ donné par :

$$\nabla \cdot (\rho \mathbf{U} k) = \nabla \cdot \left[\left(\mu + \frac{\mu_t}{\sigma_{k2}} \right) \nabla k \right] + P_k - \beta' \rho k \omega \quad (4.6)$$

$$\nabla \cdot (\rho \mathbf{U} \omega) = \nabla \cdot \left[\left(\mu + \frac{\mu_t}{\sigma_{\omega 2}} \right) \nabla \omega \right] \quad (4.7)$$

$$+ 2\rho \frac{1}{\sigma_{\omega 2} \omega} \nabla k \nabla \omega \quad (4.8)$$

$$+ \alpha_2 \frac{\omega}{k} P_k - \beta_2 \rho \omega^2 \quad (4.9)$$

La transition entre ces deux modèles, qui se produit dans la partie haute de la couche limite, est évaluée à l'aide de l'expression :

$$\Phi_3 = F \Phi_1 + (1 - F) \Phi_2 \quad (4.10)$$

où Φ_1 , Φ_2 et Φ_3 sont des coefficients qui correspondent respectivement au modèle $k - \omega$, $k - \epsilon$

¹http://openfoamwiki.net/index.php/Sig-Turbomachinery/_/ERCOFTAC_conical_diffuser

et le modèle SST. F est une fonction de pondération donnée par

$$F = \tanh \left(\max \left(\frac{2\sqrt{k}}{\beta\omega y}, \frac{500\nu}{y^2\omega} \right)^2 \right) \quad (4.11)$$

où y est la distance à la paroi.

Selon le manuel de CFX(ANSYS Inc. (2009)), le modèle SST utilise un limiteur de viscosité turbulente donnée par :

$$\nu_t = \frac{\mu_t}{\rho} = \frac{a_1 k}{\max(a_1\omega, SF_2)} \quad (4.12)$$

Dans les équations précédentes, β' , α_1 , α_2 , β_1 , β_2 , $\sigma_{\omega 1}$, $\sigma_{\omega 2}$, σ_{k1} , σ_{k2} sont des constantes pour CFX, et P_k est le terme de production d'énergie turbulente donné par

$$P_k = \mu_t \nabla \mathbf{U} \cdot (\nabla \mathbf{U} + \nabla \mathbf{U}^T) - \frac{2}{3} \nabla \cdot \mathbf{U} (3\mu_t \nabla \cdot \mathbf{U} + \rho k) \quad (4.13)$$

Les conditions frontières sur ces nouvelles équations sont une énergie cinétique turbulente de $2.0184 \text{ m}^2/\text{s}^2$ et une dissipation de la turbulence de $896.109 \text{ m}^2/\text{s}^3$. Le logiciel CFX convertit ces données en format approprié pour le modèle de turbulence choisi.

Les expériences numériques ont été faites sur une séquence de maillages hexaédriques de plus en plus fins. Le maillage $h1$ est le plus grossier et comporte 125 000 noeuds. Le maillage $h2$ est plus fin et comporte 450 000 noeuds. Les maillages $h3$ et $h4$ sont les plus fins et comportent respectivement 2.5 millions de noeuds et 5 millions de noeuds.

Dans les figures 4.2, on compare les composantes longitudinale U et rotationnelle W de l'écoulement aux mesures expérimentales obtenues aux stations $x = 25\text{mm}$, $x = 60\text{mm}$ et $x = 100\text{mm}$. Ces mesures semblent acceptables même si les paramètres des modèles pourraient être ajustés pour obtenir une meilleure correspondance avec les mesures expérimentales. En effet, le but des méthodes adaptatives n'est pas d'obtenir une meilleure correspondance avec les mesures. L'adaptivité est un processus permettant d'obtenir une solution de même qualité qu'une solution précise calculée sur un maillage régulier fin, mais avec moins d'éléments.

On conclut donc que les résultats présentés à la figure 4.2 sont corrects pour notre étude. On présente la viscosité turbulente sur le maillage grossier à la figure 4.3.

4.1.3 Estimation de l'erreur

Suivant les travaux de Frey et Alauzet (2005), Alauzet *et al.* (2006a), Dompierre *et al.* (2002) et Castro-Díaz *et al.* (1997), on utilise un estimateur d'erreur basé sur l'erreur d'in-

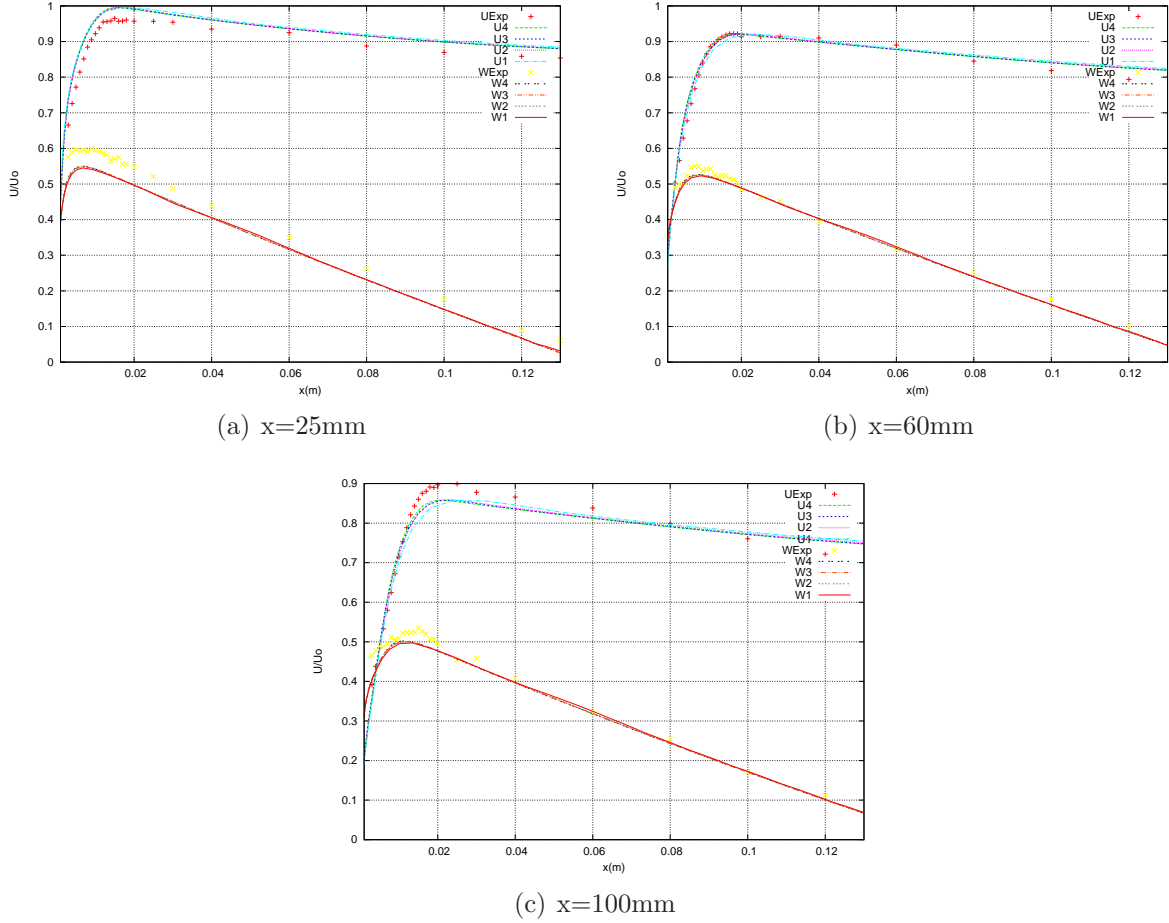


Figure 4.2 Composantes longitudinale et rotationnelle de la vitesse à trois stations

terpolation afin de déterminer la taille et l'orientation que devraient avoir les éléments du maillage. On lie l'erreur d'interpolation au Hessian de la solution à l'aide de l'équation suivante :

$$\|u - \Pi_h u\|_{\infty, K} \leq C |\Delta \vec{x}^t \tilde{H}(u) \Delta \vec{x}| \quad (4.14)$$

Le Hessian est approximé par la technique de reconstruction proposée à la section 2.2. Pour un sommet donné du maillage, il s'agit de reconstruire une surface parabolique qui approxime la valeur du scalaire aux sommets du voisinage entourant le sommet sous observation selon la procédure décrite dans Vallet *et al.* (2007).

On obtient les tenseurs métriques de la carte de taille à partir du Hessian en utilisant la procédure décrite à la section 2.1.5. On peut visualiser ces métriques en utilisant la technique proposée à la section 1.1.6. On présente donc $1/\sqrt{\lambda_i}$ afin de représenter des longueurs plutôt que des densités. La figure 4.4 montre les ellipses de la métrique de la pression sur le maillage

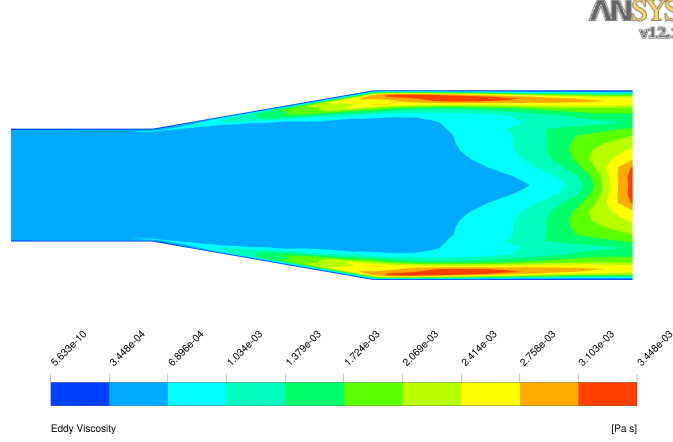


Figure 4.3 Viscosité turbulente sur le maillage grossier

grossier $h1$ sur un plan de coupe dans le diffuseur.

4.1.4 Métrique M_K d'un élément du maillage

On étend tout d'abord la méthode de calcul de la métrique M_K proposée à l'équation 3.4 utilisée pour des simplexes au cas des éléments non-simpliciaux. En effet, les maillages utilisés dans la présente étude sont des hexaèdres. On cherche donc la métrique M_K telle que toutes les arêtes de K soient unitaires dans M_K , c'est-à-dire que

$$\Delta \vec{x}^t M_k \Delta \vec{x} = 1 \quad (4.15)$$

où $\Delta \vec{x}$ est une arête de K . C'est donc dire qu'on cherche une transformation $\vec{X}(\vec{r})$ telle que l'élément K soit régulier dans l'espace \vec{r} . Dans ce cas, on a que $\Delta \vec{x} = J(\vec{r}) \Delta \vec{r}$ et donc que

$$\Delta \vec{u}^t J^t(\vec{r}) M_k J(\vec{r}) \Delta \vec{u} = 1 \quad (4.16)$$

En d'autres termes, on cherche un espace paramétrique \vec{r} dans lequel les éléments sont réguliers, c'est-à-dire que $\Delta \vec{r}^t \Delta \vec{r} = 1$ pour toutes les arêtes de K . Notons par exemple que l'interpolant de Lagrange pour le quadrilatère à quatre noeuds défini dans Dhatt et Touzot (1981) possède des arêtes de longueur 2.0, puisque les sommets sont placés à $(-1, -1)$, $(1, -1)$, $(1, 1)$ et $(-1, 1)$. On peut alors soit modifier les interpolants de Lagrange de façon à ce que l'espace paramétrique soit régulier, soit appliquer une transformation supplémentaire visant à transformer l'espace paramétrique en un espace régulier tel que proposé par Knupp (2001).

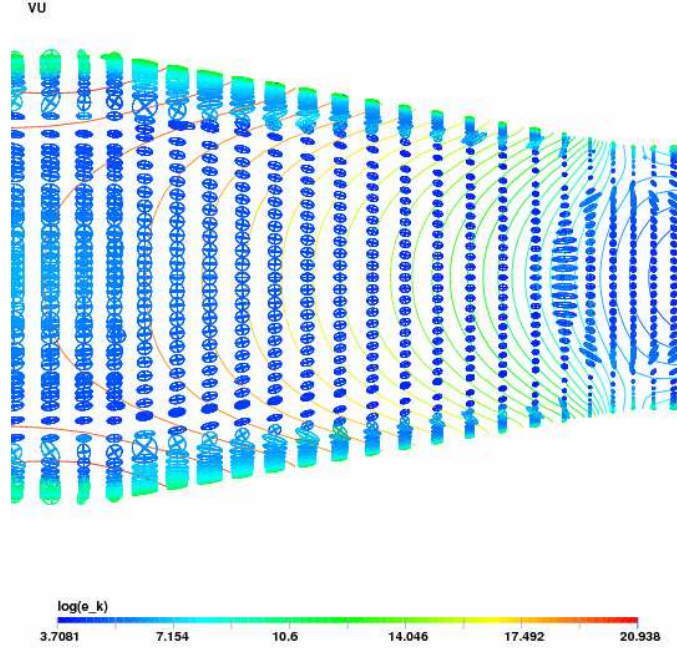


Figure 4.4 Ellipses de la métrique de la pression sur le maillage grossier.

Dans ce dernier cas, on aura soin de prendre le jacobien de la transformation complète.

Peu importe l'approche, on peut considérer que J est le jacobien de la transformation qui transforme un r d'un espace régulier vers X . On voit alors que si on substitue

$$M_k = (J^t(\vec{r}))^{-1}(J(\vec{r}))^{-1} = (J(\vec{r})J^t(\vec{r}))^{-1} \quad (4.17)$$

dans l'équation 4.16, on obtient alors l'identité désirée. On remarque qu'il s'agit de l'inverse de l'équation 1.19. La figure 4.5 montre les ellipses de M_K sur une coupe du maillage grossier composé d'hexaèdres.

4.1.5 Visualisation des actions

La mesure de non-conformité somme les résidus des deux tenseurs définis à l'équation 3.9. Ces tenseurs mesurent séparément à quel point l'élément K est trop petit par rapport à la carte de taille et à quel point l'élément K est trop grand par rapport à la carte de taille. On cherche alors une façon de visualiser l'information contenue dans ces tenseurs. Comme ces tenseurs sont ni symétriques, ni définis positifs, on doit se tourner vers une décomposition de type SVD afin d'obtenir les valeurs propres des tenseurs R_s et R_b . La décomposition SVD

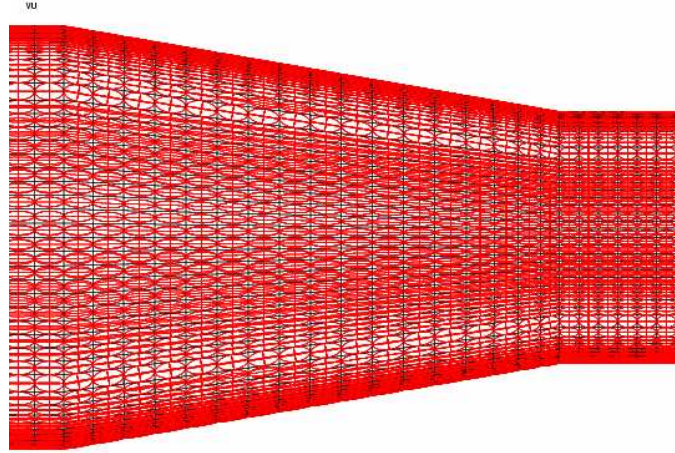


Figure 4.5 Ellipses représentant M_k sur un plan de coupe du maillage grossier

appliquée à R_s donne :

$$svd(R_s) = U_s \Sigma_s V_s^t \quad (4.18)$$

où U_s et V_s sont des matrices de rotations unitaires et Σ_s est une matrice diagonale, dans le cas de R_s , qui contient les valeurs propres de R_s . Il faut noter que la décomposition SVD donne toujours des valeurs propres positives et ordonnées en ordre décroissant. Quand l'élément K est conforme à la carte de taille dans une direction particulière, le rang de la matrice R_s sera réduit, et la décomposition SVD donnera une valeur propre nulle dans cette direction. Autrement, puisque les valeurs propres sont ordonnées, la première valeur propre indiquera l'action la plus importante à poser en regard de R_s . La direction de cette opération est donnée par le vecteur propre correspondant, contenu dans la matrice U_s^t .

On conclut qu'on peut visualiser les actions les plus importantes spécifiées par l'estimateur d'erreur en dessinant les vecteurs propres de U^t mis à l'échelle par les valeurs propres de Σ .

Les figures 4.6 et 4.7 montrent les directions des raffinements les plus importants à effectuer en vert. Les directions des déraffinements principaux sont données en rouge. La figure 4.7 montre les actions que l'estimateur d'erreur veut effectuer sur le maillage pour contrôler l'erreur d'interpolation du scalaire décrivant la pression. On voit que la concentration du maillage près des parois est inutile pour représenter la pression, et que l'estimateur d'erreur veut agrandir les éléments dans la couche limite perpendiculairement à la paroi. Par ailleurs, l'espacement entre les isocontours de la pression varie près de l'expansion à la paroi, et les vecteurs verts indiquent que l'estimateur veut raffiner ces éléments dans la direction axiale à cet endroit. De plus, dans cette zone, on voit clairement des éléments qui sont à la fois trop

petits et trop grands. On note finalement que, de façon générale, l'estimateur veut effectuer des opérations aux frontières du domaine dans le cas de la figure 4.7.

La figure 4.6 montre les actions que l'estimateur d'erreur veut effectuer sur le maillage pour contrôler un scalaire représentant la norme du vecteur vitesse. Les isocontours de ce scalaire varient fortement près de l'expansion. Les vecteurs verts indiquent que le maillage doit être raffiné dans cette région pour bien capturer ces variations. Par ailleurs, un peu plus loin en aval, les vecteurs rouges près de la paroi indiquent que l'estimateur considère que la densité des éléments est trop élevée à cet endroit. Comme précédemment, on note que, de façon générale, l'estimateur veut effectuer des opérations aux frontières du domaine dans le cas de la figure 4.6.

Cette méthodologie permet aux usagers de visualiser l'information relative à l'estimateur d'erreur. L'utilisateur peut alors voir si l'estimateur se comporte intuitivement comme il l'espère. L'utilisateur peut ainsi rapidement tester divers estimateurs d'erreur et ajuster les paramètres des estimateurs d'erreur sans avoir à calculer les maillages adaptés.

4.2 Basculement des arêtes

Le basculement d'arête est une opération nécessaire et importante du remaillage qui permet de reconnecter localement le maillage afin d'optimiser la fonction coût du remaillage. Ce problème est bien décrit dans Joe (1995), George et Borouchaki (1997), Frey et George (1999), Coupez (2000), Liu *et al.* (2009), Mlacnik et Durlofsky (2006) et Freitag et Ollivier-Gooch (1997). Le basculement de l'arête n'agit que sur la connectivité. Cette opération n'ajoute pas de nouveaux noeuds, ni n'enlève de noeuds dans le maillage. Comme on le verra plus loin, il se peut que la stratégie de retournement réduise le nombre d'éléments, ou ajoute de nouveaux éléments.

Dans les sections suivantes, on suit le développement présenté dans Coupez (1991) afin de réduire le problème de reconnexion de la boule au problème de trouver les triangulations possibles d'un polygone dans le plan. Ensuite, on montre que l'objectif de maximiser la qualité minimale permet de simplifier le problème. On fait ensuite une revue des algorithmes présentés dans la littérature pour basculer les arêtes. Finalement, on suggère un algorithme récursif par division bipariétale permettant de trouver rapidement les configurations qui maximise la qualité minimum tout en minimisant le nombre d'appel à la fonction coût.

4.2.1 Problème d'Euler et le nombre de Catalan

Pendant l'adaptation du maillage, les arêtes du maillage sont retournées afin d'optimiser une fonction coût qui tient compte de la qualité du maillage en regard de la carte de taille que

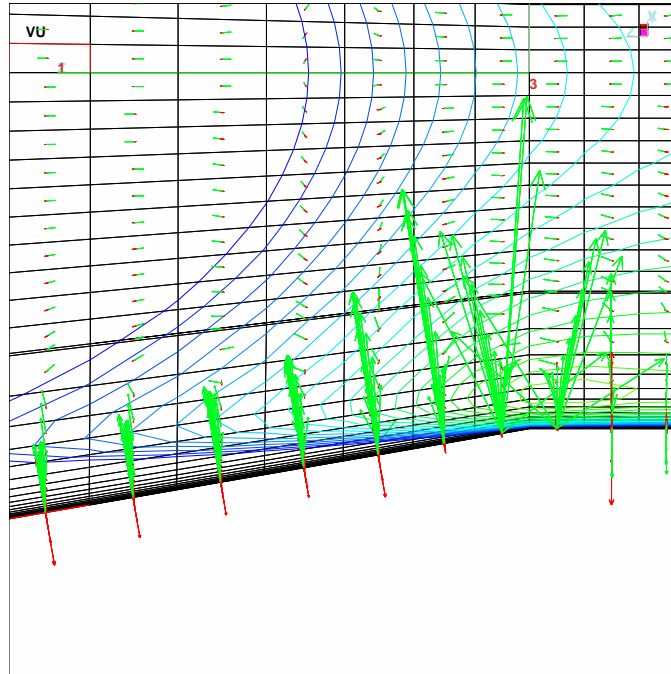


Figure 4.6 Modifications principales à faire sur le maillage selon l'indicateur basé sur la vitesse

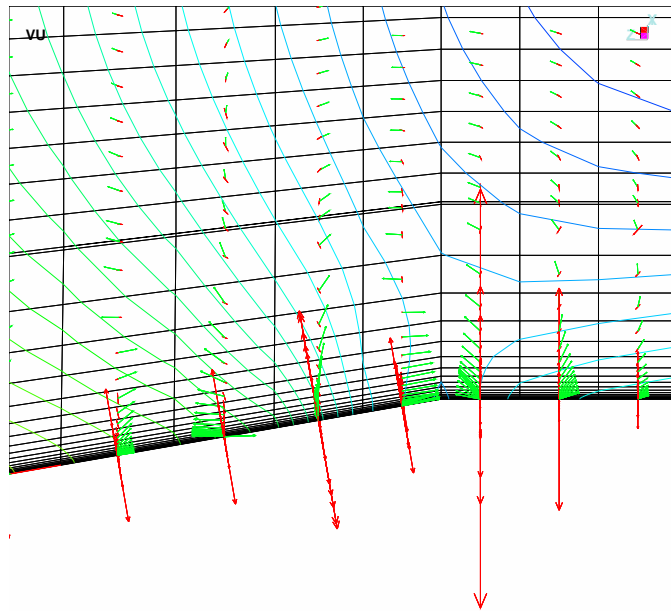


Figure 4.7 Modifications principales à faire sur le maillage selon l'indicateur basé sur la pression

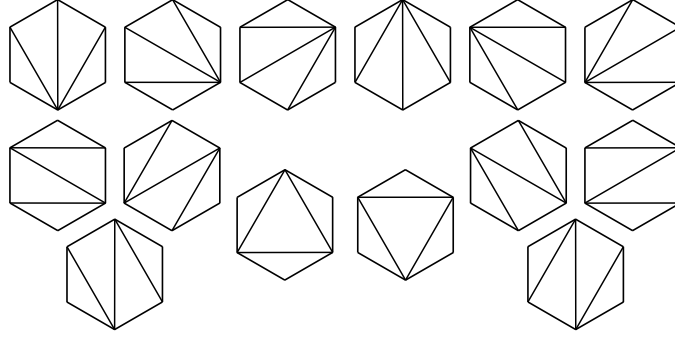


Figure 4.8 Façons possibles de reconnecter un hexagone

le maillage doit satisfaire. Pour une arête donnée, ceci correspond à regarder le sous domaine formé par tous les tétraèdres qui sont connectés à l'arête et à trouver une façon alternative de reconnecter ce sous domaine de telle sorte que l'arête de départ n'apparaisse plus dans le maillage et que la fonction coût soit optimisée.

Dans le cas de simplexes, on peut noter l'arête par le 2-tuple (A, B) , le triangle par le 3-tuple (A, B, C) et le tétraèdre par le 4-tuple (A, B, C, D) . On a donc que l'élément K est le 4-tuple (A, B, C, D) et que ses frontières ∂K sont des 3-tuples. On comprendra que l'union du 3-tuple (A, B, C) avec un quatrième sommet D forme le 4-tuple (A, B, C, D) . Les tétraèdres sont en repère main droite, i.e. $(\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}) \cdot \overrightarrow{AD} \geq 0$.

Soit \mathcal{B}_{AB} la boule formée par l'union de tous les tétraèdres qui ont (A, B) comme arête. On a donc

$$\mathcal{B}_{AB} = \bigcup_{K \in \mathcal{T}_h} K \mid K \cap (A, B) = (A, B) \quad (4.19)$$

Soit $\mathcal{Q}(\mathcal{B}_{AB})$, la qualité de la boule avant retournement. On cherche \mathcal{T}_{AB}^j , une des j tétraédrisations possibles de la boule telle que

$$\mathcal{Q}(\mathcal{T}_{AB}^j) > \mathcal{Q}(\mathcal{B}_{AB}) \quad (4.20)$$

Ce problème initialement tridimensionnel peut se réduire à un problème bidimensionnel. En effet, chaque tétraèdre K de la boule \mathcal{B}_{AB} aura deux sommets différents de l'arête (A, B) . Si on appelle (C, D) l'arête du tétraèdre K qui n'a pas de sommet en commun avec (A, B) , alors l'union de ces arêtes forme une boucle. Cette boucle est fermée dans le cas des arêtes internes et ouverte dans le cas des arêtes frontières. On s'intéresse seulement aux boucles fermées. On a donc que \mathcal{L}_{AB} est la boucle formée par l'union ordonnée des arêtes et on note $\mathcal{L}_{AB}(i)$ le sommet i de cette boucle.

Topologiquement, les tétraédrisations possibles de la boule \mathcal{B}_{AB} peuvent toutes être

générées en considérant les triangulations possibles du polygone formé par la boucle \mathcal{L}_{AB} . En effet, il suffit de connecter chaque triangle avec A , puis avec B pour former deux tétraèdres de la tétraèdrisation \mathcal{T}_{AB}^j . Et trouver les triangulations d'un polygone est par ailleurs un problème étudié par Euler. Le nombre de triangulations possibles est donné par le nombre de Catalan C_n décrit à l'équation 2.15. Par exemple, on donne à la figure 4.8 les triangulations possibles d'un hexagone. On note par $\partial\mathcal{T}_{\mathcal{L}_{AB}}^l$ une des triangulations de la figure 4.8. On voit qu'on peut effectivement générer la tétraèdrisation \mathcal{T}_{AB}^l à partir de cette triangulation en générant deux tétraèdres pour chaque triangle ∂K de $\partial\mathcal{T}_{\mathcal{L}_{AB}}^l$: le premier en connectant le triangle ∂K avec le sommet A et le second en connectant le triangle ∂K avec B . On obtient donc

$$\mathcal{T}_{AB}^l = \bigcup_{\partial K \in \partial\mathcal{T}_{\mathcal{L}_{AB}}^l} \left\{ -\partial K \cup A, \partial K \cup B \right\} \quad (4.21)$$

où $-\partial K \cup A$ est le tétraèdre obtenu en inversant le triangle ∂K que l'on combine ensuite au sommet A et $\partial K \cup B$ est le tétraèdre formé par l'union du triangle ∂K et le sommet B .

4.2.2 Qualité des reconnections

Dans le processus d'adaptation de maillage, le retournement est utilisé pour améliorer la qualité du maillage telle qu'évaluée par la fonction coût \mathcal{Q} . Dans le cas de la boule \mathcal{B}_{AB} , on détermine que la qualité de la boule $\mathcal{Q}(\mathcal{B}_{AB})$ est donnée par la qualité du moins bon élément de la boule \mathcal{B}_{AB} , i.e.

$$\mathcal{Q}(\mathcal{B}_{AB}) = \min_{K \in \mathcal{B}_{AB}} \mathcal{Q}(K) \quad (4.22)$$

Ainsi, on retournera l'arête (A, B) si on fait disparaître le moins bon élément autour de l'arête tout en ne faisant pas apparaître de nouveaux éléments qui sont de moins bonne qualité que celui qu'on vient d'éliminer.

Par ailleurs, la qualité de la tétraèdrisation \mathcal{T}_{AB}^l peut se calculer à partir de la triangulation $\partial\mathcal{T}_{\mathcal{L}_{AB}}^l$. En effet, si on note le triangle $\partial K = (i, j, k)$ comme étant le triangle de la triangulation $\partial\mathcal{T}_{\mathcal{L}_{AB}}^l$ dont les sommets sont $(\mathcal{L}_{AB}(i), \mathcal{L}_{AB}(j), \mathcal{L}_{AB}(k))$, alors on peut assigner au triangle (i, j, k) une qualité donnée par la qualité du moins bon tétraèdre formé à partir du triangle $(\mathcal{L}_{AB}(i), \mathcal{L}_{AB}(j), \mathcal{L}_{AB}(k))$ et soit A , soit B . On a donc

$$\begin{aligned} \mathcal{Q}(i, j, k) = \min(\mathcal{Q}(\mathcal{L}_{AB}(j), \mathcal{L}_{AB}(i), \mathcal{L}_{AB}(k), A), \\ \mathcal{Q}(\mathcal{L}_{AB}(i), \mathcal{L}_{AB}(j), \mathcal{L}_{AB}(k), B)), \end{aligned} \quad (4.23)$$

où le tétraèdre $(\mathcal{L}_{AB}(j), \mathcal{L}_{AB}(i), \mathcal{L}_{AB}(k), A)$ provient du triangle $(\mathcal{L}_{AB}(i), \mathcal{L}_{AB}(j), \mathcal{L}_{AB}(k))$ qu'on inverse et qu'on combine ensuite au sommet A .

Ensuite, on voit que la qualité d'une triangulation $\partial\mathcal{T}_{\mathcal{L}_{AB}}^l$ est donnée par la qualité du moins bon triangle ∂K de $\partial\mathcal{T}_{\mathcal{L}_{AB}}^l$. Soit.

$$\mathcal{Q}(\mathcal{T}_{\mathcal{L}_{AB}}^j) = \min_{\partial K \in \partial\mathcal{T}_{\mathcal{L}_{AB}}^l} \mathcal{Q}(i, j, k), \quad (4.24)$$

où (i, j, k) est la connectivité du triangle ∂K .

4.2.3 État de l'art

On voit que le problème du retournement d'une arête interne du maillage est un problème qui possède C_n solution où C_n est le nombre de Catalan donnée à l'équation 2.15 et où n est la valence de l'arête. Comme le nombre C_n croît très rapidement, toutes les librairies d'adaptation doivent avoir une stratégie pour contrôler l'effort mis dans le basculement. Dans Coupez (1991), on définit deux approches pour limiter l'effort de calcul : 1-soit on limite la taille topologique de la boule ou, 2-soit on explore seulement un sous ensemble des reconnections possibles de la boule. Dans le premier cas, cela consiste à se fixer un seuil N_{Max} et à vérifier les C_n combinaisons si la valence de l'arête est inférieur à N_{max} . Cette approche est justifiable puisque Freitag et Ollivier-Gooch (1997) montre que le retournement de face permet de diminuer la valence des arêtes surconnectées. La deuxième approche consiste, par exemple, à ne considérer que les étoilés illustrés sur la première rangée de la figure 4.8. Bien sûr, on peut combiner ces deux approches en ne traitant que les étoilés à partir d'un certain seuil.

Par ailleurs, dans Freitag et Ollivier-Gooch (1997), on montre que la première approche donne des résultats satisfaisants quand on se limite à basculer les arêtes qui sont connectées à moins de 7 tétraèdres. La qualité de ces résultats dépend du retournement de face pour réduire la valence de l'arête. Cette approche semble être la plus utilisée dans la littérature.

Finalement, la mise en oeuvre peut terminer dès qu'une meilleure reconnexion est trouvée ou continuer de façon à trouver la meilleure reconnexion possible. Dans le premier cas, on peut éviter d'avoir à calculer la qualité de certains triangles. Dans le deuxième cas, l'implantation la plus directe consiste à évaluer la qualité de tous les triangles de la boucle et ensuite de parcourir toutes les triangulations afin de trouver la meilleure. On rappelle ici que le calcul de la qualité d'un tétraèdre par rapport à une carte de taille anisotrope est très dispendieux.

4.2.4 Algorithme

On cherche ici un algorithme qui sera capable de

1. rejeter rapidement les cas où il n'y a pas de meilleure reconnexion possible,

2. trouver rapidement la meilleure reconnexion parmi toutes les possibilités sans limitations et
3. limiter le nombre d'appel à la fonction coût.

En effet, il y a de moins en moins de retournements qui améliorent la qualité du maillage quand le maillage converge. Il faut donc rapidement reconnaître qu'il n'y a pas de meilleure reconnexion de la boule.

L'algorithme proposé repose sur l'identification de triangles frontières. Les triangles frontières des triangulations $\bigcup \partial \mathcal{T}_{\mathcal{L}_{AB}}^l$ sont les triangles dont les indices se suivent successivement, i.e.

$$(i, j, k)^\Gamma = (i, i+1, i+2) \quad (4.25)$$

La figure 4.9 présente les triangles frontières dans le cas des triangulations d'un hexagone. Sur cette figure, les triangles frontières sont dessinés en noir.

On remarque sur la figure 4.9 que toutes les triangulations de l'hexagone ont au moins deux triangles frontières. Il en est de même pour toutes les boucles ayant plus de trois sommets. Cette propriété peut être exploitée à l'aide de la proposition suivante :

Proposition 4.1 *Si on ne trouve pas deux triangles frontières $(i, i+1, i+2)$ et $(j, j+1, j+2)$ avec $j - i > 2$ dans les triangulations $\bigcup \partial \mathcal{T}_{\mathcal{L}_{AB}}^l$ qui ont une meilleure qualité que $\mathcal{Q}(\mathcal{B}_{AB})$, alors il n'existe pas de meilleure tétraédrisation de la boule \mathcal{B}_{AB} .*

Ceci suggère de simplement boucler sur les $n - 2$ premiers sommets de la boucle \mathcal{L}_{AB} afin de trouver un premier triangle frontière de meilleure qualité que $\mathcal{Q}(\mathcal{B}_{AB})$. Si on en trouve un, on saute deux sommets et on cherche jusqu'au sommet n s'il y a un autre triangle frontière. Si on ne trouve pas un deuxième meilleur triangle frontière, alors on termine. On voit donc que la recherche termine en $n - 2$ évaluations dans le meilleur des cas. Ce cas arrive assez fréquemment, puisque les triangles frontières sont généralement de mauvaise qualité.

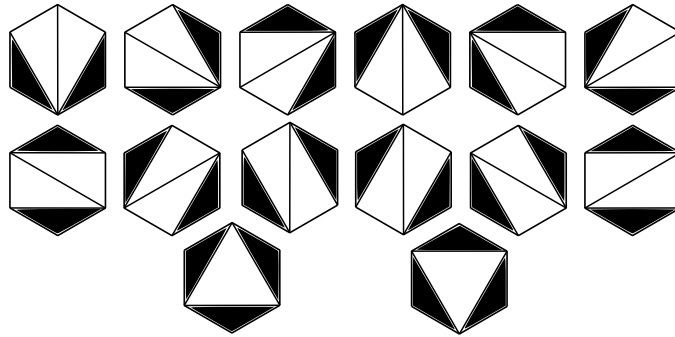


Figure 4.9 Triangles frontières des reconnexions possibles d'un hexagone

Dans le cas où on trouve deux triangles frontières de meilleure qualité que $\mathcal{Q}(\mathcal{B}_{AB})$, alors on peut retirer $i+1$ et $j+1$ de la boucle et mettre les triangles $(i, i+1, i+2)$ et $(j, j+1, j+2)$ dans $\partial\mathcal{T}_{\mathcal{L}_{AB}}$. Ceci réduit la taille de la boucle et réduit donc considérablement le nombre de configurations à vérifier. Pour construire le restant de $\partial\mathcal{T}_{\mathcal{L}_{AB}}$, on utilise le même algorithme récursivement avec la boucle réduite. La condition de sortie correspond au cas où il ne reste que trois ou quatre sommets dans la boucle. Dans le premier cas, on termine favorablement si le triangle restant est de meilleure qualité que $\mathcal{Q}(\mathcal{B}_{AB})$. Dans le cas à quatre sommets, on termine favorablement si la meilleure des configurations restantes est de meilleure qualité que $\mathcal{Q}(\mathcal{B}_{AB})$.

Dans les cas où on termine favorablement, on aura trouvé une triangulation $\mathcal{T}_{\mathcal{L}_{AB}}^l$ de meilleure qualité que $\mathcal{Q}(\mathcal{B}_{AB})$. On peut noter $\mathcal{Q}(\mathcal{T}^l)$ comme étant la qualité du moins bon triangle de cette triangulation. Il se peut qu'il reste, parmi les reconnexion restantes, une reconnexion de meilleure qualité que $\mathcal{Q}(\mathcal{T}^l)$. On continue donc les recherches récursives avec $\mathcal{Q}(\mathcal{T}^l)$ comme cible à améliorer.

Voici quelques détails supplémentaires qui peuvent aider la mise en oeuvre des idées ci-haut. Tout d'abord, en complément de la boucle \mathcal{L}_{AB} , on définit les sommets actifs à un niveau n de division comme étant

$$SA^n = I_1, \dots, I_M \quad (4.26)$$

ce qui permet de définir la boucle courante \mathcal{L}_{AB}^n de façon à avoir

$$\mathcal{L}_{AB}^n(i) = \mathcal{L}_{AB}(SA^n(i)) \quad (4.27)$$

Ainsi, le processus de division de la boucle des sommets actifs à un niveau $n+1$ à partir du niveau n par le retrait des sommets i et j consiste à générer une nouvelle liste de sommets actifs de la façon suivante :

$$SA^{n+1} = SA^n \setminus I_i, I_j \quad (4.28)$$

On voit donc que $Card(SA^{n+1}) = Card(SA^n) - 2$.

On peut maintenant présenter l'algorithme récursif par division bipariétale qui trouve, quand elle existe, la meilleure reconnexion de la boucle entourant une arête. Cet algorithme prend en argument la qualité cible à améliorer, la boucle restante. L'algorithme mettra la connectivité de meilleure qualité dans l'argument de sortie et retournera la qualité de cette connectivité.

Cet algorithme permet de trouver rapidement la meilleure reconnexion de la boucle entourant l'arête AB . Il est important de noter qu'un triangle (i, j, k) peut participer à plusieurs

Algorithme 1: $Q(Q_{min}, \mathcal{L}^n, \partial\mathcal{T})$

Input : Q_{min}, \mathcal{L}^n **Output :** $\partial\mathcal{T}$ $M = \text{Card}(\mathcal{L}^n);$ **if** $M \leq 2$ **then** throw error;**else if** $M == 3$ **then** $QualiT = Q(\mathcal{L}^n(0), \mathcal{L}^n(1), \mathcal{L}^n(2)) ;$ **if** $QualiT > Q_{min}$ **then** $\partial\mathcal{T} = (\mathcal{L}^n(0), \mathcal{L}^n(1), \mathcal{L}^n(2)) ;$ // eqn 4.23 **return** $QualiT;$ **else if** $M == 4$ **then** $Q_1 = \min(Q(\mathcal{L}^n(0), \mathcal{L}^n(1), \mathcal{L}^n(2)), Q(\mathcal{L}^n(0), \mathcal{L}^n(2), \mathcal{L}^n(3)));$ $Q_2 = \min(Q(\mathcal{L}^n(0), \mathcal{L}^n(1), \mathcal{L}^n(3)), Q(\mathcal{L}^n(3), \mathcal{L}^n(1), \mathcal{L}^n(2)));$ $QualiT = \max(Q_1, Q_2);$ **if** $QualiT > Q_{min}$ **then** **if** $QualiT == Q_1$ **then** $\partial\mathcal{T} = (\mathcal{L}^n(0), \mathcal{L}^n(1), \mathcal{L}^n(2)) + (\mathcal{L}^n(0), \mathcal{L}^n(2), \mathcal{L}^n(3));$ **else** $\partial\mathcal{T} = (\mathcal{L}^n(0), \mathcal{L}^n(1), \mathcal{L}^n(3)) + (\mathcal{L}^n(3), \mathcal{L}^n(1), \mathcal{L}^n(2));$ **return** $QualiT;$ **else** **for** $i = 0 ; i < M - 2$ **do** $Q_i = Q(\mathcal{L}^n(i), \mathcal{L}^n(i+1), \mathcal{L}^n(i+2));$ **if** $Q_i > Q_{min}$ **then** **for** $j = i + 2 ; j < M$ **do** $Q_j = Q(\mathcal{L}^n(j), \mathcal{L}^n((j+1)\%M), \mathcal{L}^n((j+2)\%M));$ **if** $Q_j > Q_{min}$ **then** $\mathcal{L}^{n+1} = \mathcal{L}^n - i - j;$ new $\partial\mathcal{T}^{n+1}$; // triangulation vide $Q_{n+1} = Q(Q_{min}, \mathcal{L}^{n+1}, \partial\mathcal{T}^{n+1}) ;$ // appel récursif **if** $Q_{n+1} > Q_{min}$ **then** $\partial\mathcal{T}^n = \partial\mathcal{T}^{n+1} ;$ $\partial\mathcal{T}^n += (\mathcal{L}^n(i), \mathcal{L}^n(i+1), \mathcal{L}^n(i+2)) ;$ $\partial\mathcal{T}^n += (\mathcal{L}^n(j), \mathcal{L}^n((j+1)\%M), \mathcal{L}^n((j+2)\%M));$ $Q_{min} = \min(Q_i, Q_j, Q_{n+1});$ **if** $Q_{min} == Q_i$ **then** // inutile de faire les autres j

break;

triangulations $\partial\mathcal{T}_{\mathcal{L}_{AB}}^l$ de la boucle. Il est donc astucieux de mémoriser les $\mathcal{Q}(i, j, k)$ afin d'éviter les évaluations multiples.

Cet algorithme est en production dans le code **OORT** depuis ses débuts. Il s'est montré très robuste et le basculement d'arête n'a jamais été identifié comme un goulot lors de l'optimisation des maillages.

CHAPITRE 5

DISCUSSION GÉNÉRALE ET RETOMBÉES

Bien que les processus adaptatifs aient été appliqués avec succès pour les écoulements tridimensionnels externes non-visqueux et compressibles, les écoulements internes restent problématiques. Ces écoulements sont en effet très sensibles aux effets de parois et aux interactions entre ces parois dûs à la turbulence. Néanmoins, les technologies adaptatives semblent suffisamment intéressantes et prometteuses pour s'y intéresser immédiatement. Il faut donc mettre en oeuvre un processus adaptatif tel que décrit dans la littérature en trois dimensions pour des géométries industrielles telles que décrites à la section 1.1.1 et suivre ou compléter les développements permettant d'appliquer le processus aux écoulements internes.

On commence donc par la mise en oeuvre d'un processus adaptatif permettant de donner des résultats fiables pour un problème avec un seul scalaire. Cette première boucle adaptative nécessite la mise en oeuvre d'un estimateur d'erreur, d'une librairie de modification de maillage et d'une boucle adaptative. Afin d'effectuer ces mises en oeuvre de façon méthodique et rigoureuse, on doit émettre des hypothèses sur les objectifs de chacune des composantes et ensuite mesurer si ces objectifs ont été atteints.

Dans le cas de l'estimateur d'erreur, les travaux de Zienkiewicz et de Zhu sont déjà très rigoureux sur la mise en oeuvre de l'estimateur d'erreur. L'utilisation d'une solution manufacturée et les graphes de convergence de la reconstruction utilisée et de la convergence entre l'estimateur d'erreur et l'erreur exacte permettent de vérifier que la mise en oeuvre est correcte.

Dans le cas du calcul du maillage adapté, on peut utiliser une carte de taille analytique aux fins de comparaison, mais on ne dispose pas d'une mesure unique permettant de mesurer à quel point le maillage adapté correspond à la carte de taille que le maillage doit satisfaire. On a donc proposé une nouvelle mesure qui compare les tenseurs de la carte de taille avec la métrique de la transformation qui rend l'élément équilatéral. Cette mesure permet de valider que le maillage est bien adapté à la carte de taille analytique utilisée comme cas test.

Finalement, dans le cas de la boucle adaptative, il n'existe pas de façon formelle de vérifier que le processus adaptatif fonctionne bien. En effet, le but exprimé des processus adaptatifs est d'équirépartir l'erreur d'approximation. Les théories d'approximation parlent du problème minimax afin de définir l'approximation optimale. Il s'agit de minimiser la distance maximale entre la fonction à approximer et l'interpolation. Dans ce contexte, l'approximation est optimale quand tous les éléments ont la même distance maximale entre l'approximation et

la fonction à approximer. L'équirépartition correspond donc, dans ce contexte, à générer un maillage adapté pour lequel tous les éléments auront la même distance maximum entre la solution numérique et la solution manufacturée. La distance maximale est bien entendu la norme L^∞ élémentaire de l'erreur d'approximation. Comme cette mesure varie d'un élément à l'autre, on s'intéresse plutôt à la population des normes élémentaires maximum de l'erreur d'approximation, à sa moyenne et à sa variance. Tout écart notable est signe d'un problème d'implantation. De plus, des régions cohérentes où la norme élémentaire maximum s'écarte de la moyenne indiquent des problèmes. L'équirépartition de l'erreur n'est pas une quantité qui est mesurée ou qui est surveillée dans la littérature par les équipes oeuvrant dans le domaine de l'adaptation de maillage. On a donc exprimé mathématiquement une façon de mesurer l'équirépartition. On a ensuite vérifié que le processus adaptatif équirépartissait l'erreur d'approximation en utilisant des problèmes avec des solutions manufacturées.

5.1 Retombées de la non-conformité

La mesure de non-conformité a été développée séparément par Labbé *et al.* (2004) et par Bottasso (2004). Cette mesure a été utilisée par Gruau (2004) pour suivre la convergence de son remailleur. La mesure a aussi été appliquée par Sirois *et al.* (2010) pour adapter des maillages composés d'éléments non-simpliciaux qui a présenté une méthode efficace permettant d'approximer la mesure de non-conformité sur des hexaèdres.

5.2 Retombées de la vérification du processus adaptatif

La méthodologie de vérification du processus adaptatif de la figure 1.2 a permis la mise en oeuvre méthodique et rigoureuse d'une boucle adaptative qui utilise **OORT**. Cette boucle adaptative a été utilisée par Guibault *et al.* (2009) pour adapter des maillages hybrides. La boucle a aussi été utilisée par Joubarne et Guibault (submitted) pour adapter des maillages de problèmes avec des vortex, par Bedwani *et al.* (2008) et par Courchesne *et al.* (2007) pour adapter des maillages pour des problèmes d'imagerie.

5.3 Retombées de la stratégie de visualisation

La stratégie de visualisation des actions principales que l'estimateur d'erreur veut effectuer sur le maillage a été présentée dans un symposium de l'ASME le 3 août 2010 à Montréal. Cette stratégie a été mise en oeuvre à l'IREQ.

5.4 Retombées de l'algorithme de basculement

L'algorithme récursif de basculement par division bipariétale est intégré dans **OORT** depuis sa création. Cet algorithme est efficace et robuste. Le basculement n'a jamais été identifié comme un goulot d'étranglement dans le processus d'adaptation de maillage. Cet algorithme contribue à tous les résultats produits par **OORT**.

5.5 Limitations des solutions proposées

La mesure de non-conformité présentée est coûteuse. Son évaluation requiert deux inversions de matrices à tous les points de Gauss. Son utilisation comme fonction objective est très coûteuse par rapport au simple calcul de la longueur métrique des arêtes.

Aussi, quand la non-conformité est élevée, il semble difficile de prime abord de savoir si l'élément doit être raffiné parce qu'il est trop gros ou déraffiné parce qu'il est trop petit. Or, la section 4.1 montre comment la non-conformité est constituée de deux matrices résiduelles et comment chaque matrice correspond séparément au fait que l'élément est trop grand ou trop petit par rapport à la carte de taille. Ces matrices contiennent donc toute l'information nécessaire pour savoir si l'élément est trop grand ou trop petit.

La méthodologie de vérification du processus adaptatif quant à elle assume que le processus équirépartit la norme L^∞ de l'erreur d'interpolation. Or, de nouveaux processus adaptatifs équirépartissent d'autres normes de l'erreur. Le processus devrait être revu pour tenir compte de ces nouvelles normes, principalement en calculant l'écart type de la norme appropriée. De plus, il semble manquer un élément théorique qui prouve que le processus adaptatif à un ordre de convergence plus élevé que le raffinement uniforme. En effet, si on raffine uniformément un maillage adapté, on devrait obtenir le taux de convergence théorique de la méthode. Par ailleurs, si on adapte ce même maillage de départ, mais avec une cible plus précise, on devrait obtenir un meilleur maillage que le maillage obtenu précédemment. Il semble donc opportun de faire l'analyse unidimensionnelle nécessaire pour bien comprendre ce phénomène.

Pour ce qui est de la visualisation des actions principales que l'estimateur veut effectuer sur le maillage, le fait de visualiser simultanément de l'information sur les éléments trop gros et trop petits devient lourd. Notamment, on ne peut pas utiliser de dégradé de couleur dans ce cas, puisque l'utilisateur ne saura pas si les couleurs s'appliquent aux éléments trop grands ou trop petits. Finalement, dans le cas d'un élément trop petit, on conçoit bien qu'un grand vecteur veut dire qu'il faut repousser les frontières de l'élément jusqu'au bout du vecteur. Mais dans le cas d'un élément trop gros, un grand vecteur signifie qu'il faut beaucoup rapetisser l'élément. Ceci est contre-intuitif et nécessite une période d'adaptation.

Finalement, pour ce qui est de l'algorithme récursif de basculement par division bi-

pariétale, l'approche fonctionne seulement dans le cas de problèmes où il faut maximiser la qualité minimum. Notamment, cet algorithme ne peut pas être utilisé pour minimiser le recouvrement.

CHAPITRE 6

CONCLUSION

Cette thèse s’articule autour de deux contributions originales principales et de deux contributions originales secondaires. Toutes ces contributions concernent la méthodologie de mise en oeuvre méthodique et rigoureuse d’outils d’adaptation de maillage afin d’assurer la fiabilité des résultats de simulations CFD.

La première contribution originale porte sur la création d’une mesure de la qualité d’un maillage par rapport à l’estimateur d’erreur choisi. Cette mesure est basée sur une comparaison entre la métrique de la transformation qui rend l’élément régulier (c’est-à-dire équilatéral et unitaire) et la métrique spécifiée dans la carte de taille issue de l’estimateur d’erreur. Il n’existait pas, avant ces travaux, de mesure unique capable de faire ceci, et ce manque était noté dans plusieurs ouvrages. La mesure de non-conformité développée pour des simplexes est la première mesure disponible capable de tenir compte à la fois de la taille et de la forme lors de la comparaison avec la carte de taille.

La seconde contribution originale de cette thèse est le développement d’une méthodologie scientifique pour vérifier les processus adaptatifs. Il s’agit d’exprimer clairement le but ultime de l’adaptation, à savoir l’équirépartition de la norme L^∞ de l’erreur d’interpolation. Une procédure de vérification qui s’articule autour de cet objectif est illustrée, et des cas tests simples permettent d’isoler le processus d’adaptation afin d’en faire la vérification. Il n’existait pas en effet d’endroit où l’on exprimait ainsi clairement le but de l’adaptation de maillage avec des mesures aussi rigoureuses. Maintenant, on dispose d’une méthodologie qui permet de vérifier si de nouvelles contributions améliorent effectivement l’équirépartition de la norme L^∞ de l’erreur d’approximation. De plus, on présente des études de convergence qui comparent des approches uniformes, isotropes et anisotropes. Ces études montrent que, dans le cas de maillages tridimensionnels pour des problèmes très anisotropes, un maillage de 7000 tétraèdres étirés est aussi précis qu’un maillage de 4 millions de tétraèdres uniformes et qu’un maillage de 550 000 tétraèdres isotropes.

La première contribution secondaire permet de visualiser les opérations principales que l’estimateur d’erreur veut effectuer sur le maillage. En effet, l’introduction des techniques adaptatives dans les analyses quotidiennes ne peut pas se faire en un seul coup. Les utilisateurs doivent s’approprier ces outils, et le premier pas est de se familiariser avec l’estimateur d’erreur. Or, bien qu’il soit possible de visualiser les métriques issues de l’estimateur à l’aide d’ellipsoïdes, cette information n’indique pas les éléments trop grands ou trop petits. On

présente donc une approche qui décompose la mesure de non-conformité en deux tenseurs distincts qui sont sensibles séparément aux directions dans lesquelles les éléments sont trop grands et les directions dans lesquelles les éléments sont trop petits. Une décomposition SVD permet ensuite de déterminer les vecteurs propres de ces tenseurs et permet alors la visualisation de ces informations.

Une seconde contribution originale secondaire permet à la librairie de modification de maillage d'effectuer le basculement d'arête de façon optimale. Tout d'abord, un algorithme de basculement original a été développé et est utilisé en production dans la librairie **OORT**. Cet algorithme de basculement trouve de façon rapide la meilleure reconnexion de la boule qui entoure une arête interne. Il s'agit d'un algorithme récursif basé sur le constat que toutes les reconnexions doivent avoir deux paires de tétraèdres frontières. Chaque fois que les deux paires de tétraèdres sont identifiées, on les retire du problème et on relance la recherche. Cet algorithme a l'avantage de déterminer rapidement les cas où la connexion de la boule avec l'arête initiale est optimale. En effet, les pires tétraèdres sont souvent les tétraèdres frontières de la boule.

6.1 Perspectives

La mesure de non-conformité pourrait servir de fonction coût unique lors de l'optimisation de maillage. Il faudrait alors que la mesure de non-conformité soit utilisée lors du raffinement, lors du déraffinement, lors du retournement et lors du déplacement. Pour le raffinement et le déraffinement, on a montré qu'il était possible de déterminer si un élément est trop grand ou trop petit avec la mesure de non-conformité en regardant individuellement les résidus qui composent la mesure. Aussi, on a exprimé la non-conformité d'une arête du maillage, ce qui pourrait être utilisé comme critère de raffinement ou de déraffinement. Dans le cas du retournement, la qualité d'un tétraèdre pourrait être la mesure de non-conformité en tenant compte du fait qu'on maximise la qualité alors qu'il faudrait minimiser la non-conformité. Dans le cas du déplacement, des travaux ont déjà été faits en ce sens. Il semble donc possible de concevoir une heuristique d'optimisation du maillage qui utilise directement la non-conformité comme unique fonction coût lors de l'adaptation de maillage.

Dans le cas de la méthodologie de vérification du processus adaptatif, il serait intéressant de s'ouvrir aux autres normes qui ont récemment été utilisées en adaptation de maillage. De plus, en utilisant le processus vérifié, il serait maintenant pensable de comparer les divers estimateurs afin de comparer leurs capacités à équilibrer l'erreur d'approximation. Aussi, la méthodologie de vérification permet de comparer des algorithmes d'adaptation de maillage en comparant la qualité de l'équilibrage obtenue avec les algorithmes. Ceci devrait permettre

de trouver de nouvelles façons de combiner les opérateurs ou de définir de nouveaux opérateurs de modification de maillage.

On doit noter que, le contexte initial étant d'utiliser les stratégies adaptatives pour assurer la fiabilité des analyses CFD, il reste à trouver un estimateur pour le problème des équations de Navier-Stokes en formulation RANS. A cet effet, le modèle de turbulence SST fonctionne avec des maillages dont le premier noeud à la paroi est à $y^+ = 1$. On peut donc espérer adapter le maillage jusqu'à la paroi. Autrement, il faut prévoir l'adaptation de maillage hybride. Dans tous les cas, on cherche encore un estimateur d'erreur d'approximation pour les équations de Navier-Stokes qui soit insensible aux changements d'unité dans les variables primaires.

Finalement, un processus adaptatif vérifié qui contrôle l'erreur d'interpolation pour un problème à un scalaire peut s'appliquer tel quel pour plusieurs types de problèmes. C'est le cas entre autres du calcul du potentiel magnétique et de la diffusion de la chaleur.

Références

- ACIKGOZ, N. et BOTTASSO, C. L. (2007). Metric-driven mesh optimization using a local simulated annealing algorithm. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 71, 201–223.
- ALAUZET, F., FREY, P. J., GEORGE, P. L. et MOHAMMADI, B. (2007). 3d transient fixed point mesh adaptation for time-dependent problems : Application to cfd simulations. *Journal of Computational Physics*, 222, 592 – 623.
- ALAUZET, F., LI, X., SEOL, E. et SHEPHARD, M. (2006a). Parallel anisotropic 3d mesh adaptation by mesh modification. *Engineering with Computers*, 21, 247–258.
- ALAUZET, F., LOSEILLE, A., DERVIEUX, A. et FREY, P. (2006b). Multi-dimensional continuous metric for mesh adaptation. *Fifteenth International Meshing Roundtable*. Sandia National Laboratories, Birmingham, AL, 191–214.
- ANSYS INC. (2009). *ANSYS CFX-Solver Theory Guide*.
- APEL, T., GROSMAN, S., JIMACK, P. et MEYER, A. (2004). A new methodology for anisotropic mesh refinement based upon error gradients. *Applied Numerical Mathematics*, 50, 329–341.
- BEALL, M. W., WALSH, J. et SHEPHARD, M. S. (2003). Accessing cad geometry for mesh generation. *12th International Meshing Roundtable*. Sandia National Laboratories, Santa Fe, NM, 2003–3030.
- BEDWANI, S., GUIBAULT, F. et ROCHEFORT, A. (2008). Nanoscale adaptive meshing for rapid STM imaging. *Journal of Computational Physics*, 227, 6720–6726.
- BELHAMADIA, Y., FORTIN, A. et CHAMBERLAND, É. (2003). Anisotropic mesh adaptation for the solution of the Stefan problem. *Journal of Computational Physics*, 194, 233–255.
- BELHAMADIA, Y., FORTIN, A. et CHAMBERLAND, É. (2004). Three-dimensional anisotropic mesh adaptation for phase change problems. *Journal of Computational Physics*, 201, 753–770.
- BERNARDI, C., MÉTIVET, B. et VERFÜRTH, R. (2001). Analyse numérique d’indicateurs d’erreur. P.-L. Georges, éditeur, *Maillage et adaptation*, Hermès, Paris, Mécanique et Ingénierie des Matériaux, chapitre 10. 251–278.
- BOROUCHAKI, H. (2001). La marche unité. P.-L. Georges, éditeur, *Maillage et adaptation*, Hermès, Mécanique et Ingénierie des Matériaux, chapitre 4. 139–172.

- BOTTASSO, C. L. (2004). Anisotropic mesh adaption by metric-driven optimization. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 60, 597–639.
- BOUNOS, O. (2008). Studies of the ercoftac conical diffuser using openfoam. Rapport technique, Chalmers University of Technology, Department of Applied Mechanics. Presented at the 3rd OpenFOAM Workshop, Milan, Italy.
- BOURGAULT, Y., PICASSO, M., ALAUZET, F. et LOSEILLE, A. (2009). On the use of anisotropic *a posteriori* error estimators for the adaptative solution of 3d inviscid compressible flows. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 59, 47–74.
- BUSCAGLIA, G. C. et DARI, E. A. (1997). Anisotropic mesh optimization and its application in adaptivity. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 40, 4119–4136.
- CASTRO-DÍAZ, M. J., HECHT, F., MOHAMMADI, B. et PIRONNEAU, O. (1997). Anisotropic unstructured mesh adaption for flow simulations. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, 25, 475–491.
- CHEN, L., SUN, P. et XU, J. (2007). Optimal anisotropic meshes for minimizing interpolation error in l^p -norm. *Mathematics of Computations*, 76, 179–204.
- CIARLET, P. G. (1978). *The finite element method for elliptic problems*. North-Holland Publishing Company, Amsterdam.
- CLAUSEN, P. et WOOD, D. (1987). Some measurements of swirling flow through an axisymmetric diffuser. *Proceedings of Sixth Symposium on Turbulent Shear Flows, Paul Sabatier University, Toulouse, France*.
- CLAUSEN, P. D., KOH, S. G. et WOOD, D. H. (1993). Measurements of a swirling turbulent boundary layer developing in a conical diffuser. *Experimental Thermal and Fluid Science*, 6, 39–48.
- COMPÈRE, G., REMACLE, J. F., JANSSEN, J. et HOFFMAN, J. (2010). A mesh adaptation framework for dealing with large deforming meshes. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 82, 843–867.
- COUPEZ, T. (1991). *Grandes transformations et remaillage automatique*. Thèse de doctorat, École nationale supérieure des mines de Paris.
- COUPEZ, T. (2000). Génération de maillage et adaptation de maillage par optimisation locale. *Revue européenne des éléments finis*, 9, 403–423.
- COUPEZ, T. et BIGOT, E. (2000). 3d anisotropic mesh generation and adaptation with applications. Barcelona.

- COURCHESNE, O., GUIBAULT, F., DOMPIERRE, J. et CHERIET, F. (2007). Adaptive mesh generation of MRI images for 3D reconstruction of human trunk. *Proceedings of the International Conference on Image Analysis and Recognition (ICIAR07)*. Montréal, QC.
- CUILLIÈRE, J.-C. (1998). An adaptive method for the automatic triangulation of 3D parametric surfaces. *Computer-Aided Design*, 30, 139–149.
- DAVIS, P. J. (1963). *Interpolation and Approximation*. Blaisdell Publishing Company. Library of Congree catalog card number : 63-10249.
- D’AZEVEDO, E. F. et SIMPSON, R. B. (1989). On optimal interpolation triangle incidences. *SIAM J. of Sci. and Stat. Comput.*, 10.
- D’AZEVEDO, E. F. et SIMPSON, R. B. (1991). On optimal triangular meshes for minimizing the gradient error. *Numerische Mathematik*, 59, 321–348.
- DENG, G., QUEUTEY, P. et VISONNEAU, M. (2006). A code verification exercise for the unstructured finite-volume cfd solver isis-cfd. E. O. P. Wesseling et J. Periaux, éditeurs, *European Conference on Computational Fluid Dynamics*. ECCOMAS CFD 2006, 17.
- DHATT, G. et TOUZOT, G. (1981). *Une présentation de la méthode des éléments finis*. Les Presses de l’Université Laval.
- DOBRZYNSKI, C. et FREY, P. (2008). Anisotropic delaunay mesh adaptation for unsteady simulations. *11th International Meshing Roundtable*. Springer, 177–194.
- DOMPIERRE, J., LABBÉ, P. et GUIBAULT, F. (2003). OORT (Object-Oriented Remeshing Toolkit). <http://www.magnu.polymtl.ca/documentation>.
- DOMPIERRE, J., LABBÉ, P., GUIBAULT, F. et CAMARERO, R. (1998). Proposal of benchmarks for 3D unstructured tetrahedral mesh optimization. *Seventh International Meshing Roundtable*. Sandia National Laboratories, Dearborn, MI, 459–478.
- DOMPIERRE, J., LABBÉ, P., VALLET, M.-G., GUIBAULT, F. et CAMARERO, R. (2001). Critères de qualité pour les maillages simpliciaux. P.-L. George, éditeur, *Maillage et adaptation*, Hermès, Paris. 311–348.
- DOMPIERRE, J., VALLET, M.-G., BOURGAULT, Y., FORTIN, M. et HABASHI, W. G. (2002). Anisotropic mesh adaptation : Towards user-independent, mesh-independent and solver-independent CFD. Part III : Unstructured meshes. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, 39, 675–702.
- DOMPIERRE, J., VALLET, M.-G., LABBÉ, P. et GUIBAULT, F. (2005). An analysis of simplex shape measures for anisotropic meshes. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 194, 4895 – 4914. Unstructured Mesh Generation.

- EÇA, L., HOEKSTRA, M., HAY, A. et PELLETIER, D. (2007). On the construction of manufactured solutions for one and two-equation eddy-viscosity models. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, 54, 119–154. 10.1002/fld.1387.
- FORMAGGIA, L., MICHELETTI, S. et PEROTTO, S. (2004). Anisotropic mesh adaptation in computational fluid dynamics : application to the advection-diffusion-reaction and the stokes problems. *Applied Numerical Mathematics*, 51, 511–533.
- FORMAGGIA, L. et PEROTTO, S. (2000). Anisotropic error estimator for finite element methods. *31st Computational Fluid Dynamics*. von Karman Institute for Fluid Dynamics, Rhode-Saint-Genèse, Belgium, Lecture Series 2000–05.
- FORTIN, M., VALLET, M.-G., POIRIER, D. et HABASHI, W. G. (1994). Error estimation and directionally adaptive meshing. *25th AIAA Fluid Dynamics Conference*. Colorado Springs, CO, no. AIAA–94–2211.
- FREITAG, L. et KNUPP, P. M. (1999). Tetrahedral element shape optimization via the Jacobian determinant and condition number. *Eight International Meshing Roundtable*. Sandia National Laboratories, South Lake Tahoe, CA, 247–258.
- FREITAG, L. A. et OLLIVIER-GOOCH, C. (1997). Tetrahedral mesh improvement using swapping and smoothing. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 40, 3979–4002.
- FREY, P. J. et ALAUZET, F. (2005). Anisotropic mesh adaptation for cfd computations. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 194, 5068–5082. Doi : DOI : 10.1016/j.cma.2004.11.025.
- FREY, P. J. et GEORGE, P.-L. (1999). *Maillages. Applications aux éléments finis*. Hermès, Paris.
- FREY, P. J. et GEORGE, P.-L. (2000). *Mesh Generation. Application to Finite Elements*. Hermès, Paris.
- GEORGE, P.-L. et BOROUCHAKI, H. (1997). *Triangulation de Delaunay et maillage, applications aux éléments finis*. Hermès, Paris.
- GEORGE, P.-L. et BOROUCHAKI, H. (1998). *Delaunay Triangulation and Meshing. Applications to Finite Elements*. Hermès, Paris.
- GEORGE, P.-L. et BOROUCHAKI, H. (2002). Premières expériences de maillages automatiques par une méthode de Delaunay anisotrope en trois dimensions. Rapport technique RT–0272, Institut National de Recherche en Informatique et en Automatique, France.
- GRUAU, C. (2004). *Génération de métriques pour adaptation anisotrope de maillages : applications à la mise en forme des matériaux*. PhD thesis Mécanique numérique, ENSMP - CEMEF Centre de Mise en Forme des Matériaux, ENSMP.

- GUIBAULT, F., JOUBARNE, E., SIROIS, Y., ZHANG, Y. et COURCHESNE, O. (2009). Adaptation de maillages hybrides. *Revue d'Ingénierie Numérique Collaborative*, 1.
- GYLLENRAM, W. et NILSSON, H. (2006). Very large eddy simulation of draft tube flow. *Proceedings of the 23rd IAHR Symposium on Hydraulic Machinery and Systems*. Yokohama.
- HABASHI, W. G., DOMPIERRE, J., BOURGAULT, Y., AIT-ALI-YAHIA, D., FORTIN, M. et VALLET, M.-G. (2000). Anisotropic mesh adaptation : Towards user-independent, mesh-independent and solver-independent CFD. Part I : General principles. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, 32, 725–744.
- HABASHI, W. G., DOMPIERRE, J., BOURGAULT, Y., FORTIN, M. et VALLET, M.-G. (1998). Certifiable computational fluid dynamics through mesh optimization. *American Institute of Aeronautics and Astronautics Journal*, 36, 703–711.
- HAY, A. et PELLETIER, D. (2007). Code and solution verification of an adaptive finite element turbulent flow solver. *18th AIAA Computational Fluid Dynamics Conference*. AIAA, Miami, FL, USA.
- HETMANIUK, U. et KNUPP, P. (2008). Local anisotropic interpolation error estimates based on directional derivatives along edges. *SIAM Journal of Numerical Analysis*, 47, 575–595.
- HUANG, W. et SUN, W. (2003). Variational mesh adaptation ii : error estimates and monitor functions. *Journal of Computational Physics*, 184, 619 – 648.
- ILINCA, F. et PELLETIER, D. (2006). Computation of superconvergent derivatives of finite element solutions : The finite point displacement method. *submitted to IJNME 2006*.
- JOE, B. (1995). Construction of three-dimensional improved-quality triangulations using local transformations. *SIAM Journal on Scientific Computing*, 16, 1292–1307.
- JONES, W., NIELSEN, E. et PARK, M. (2006). Validation of 3d adjoint based error estimation and mesh adaptation for sonic boom reduction. *44nd Aerospace Sciences Meeting and Exhibit*. No. AIAA-2006-1150.
- JOUBARNE, E. et GUIBAULT, F. (submitted). Anisotropic mesh adaptation for vortex capture. *Mathematics and Computers in Simulation*.
- KALLINDERIS, Y. et KAVOUKLIS, C. (2005). A dynamic adaptation scheme for general 3-d hybrid meshes. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 194, 5019 – 5050. Unstructured Mesh Generation.
- KNUPP, P. M. (2000). Achieving finite element mesh quality via optimization of the Jacobian matrix norm and associated quantities. Part I – a framework for surface mesh optimization. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 401–420.

- KNUPP, P. M. (2001). Algebraic mesh quality metrics. *SIAM Journal on Scientific Computing*, 23, 193–218.
- LABBÉ, P. (1993). *Analyse par éléments finis de la résistance électrique dans les joints brasés*. Mémoire de maîtrise, Ecole Polytechnique de Montréal.
- LABBÉ, P., DOMPIERRE, J., VALLET, M.-G., GUIBAULT, F. et TRÉPANIER, J.-Y. (2004). A universal measure of the conformity of a mesh with respect to an anisotropic metric field. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 61, 2675–2695.
- LABBÉ, P. et GARON, A. (1995). A robust implementation of Zienkiewicz and Zhu’s local patch recovery method. *Communication in Numerical Methods in Engineering*, 11, 427–434.
- LABBÉ, P., GUIBAULT, F. et CAMARERO, R. (2000). Core classes for a multi-disciplinary numerical analysis framework. *Proceedings of the 7th International Conference on Numerical Grid Generation in Computational Field Simulations*. Whistler, B.-C., 933–942.
- LABBÉ, P., GUIBAULT, F., DOMPIERRE, J., TRIBES, C., VALLET, M.-G. et TRÉPANIER, J.-Y. (2002). Pirate — Towards a STEP compliant MDO environment. *40th AIAA Aerospace Sciences Meeting & Exhibit*. Reno, NV, no. AIAA 2002–0316.
- LABBÉ, P., GUIBAULT, F., DOMPIERRE, J., VALLET, M.-G. et TRÉPANIER, J.-Y. (2001). A generic mesher for STEP compliant geometries. *Proceedings of the 48th Annual CASI Conference*. Canadian Aeronautics and Space Institute, Toronto, Ontario, 77–83.
- LAWSON, C. L. (1972). Generation of a triangular grid with application to contour plotting. Rapport technique JPL–299, California Institute of Technology.
- LI, X., SHEPHARD, M. S. et BEALL, M. W. (2005). 3d anisotropic mesh adaptation by mesh modification. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 194, 4915–4950.
- LIU, A. et JOE, B. (1994). Relationship between tetrahedron shape measures. *BIT*, 34 (2), 268–287.
- LIU, J., CHEN, Y. Q. et SUN, S. L. (2009). Small polyhedron reconnection for mesh improvement and its implementation based on advancing front technique. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 79, 1004–1018.
- LO, S. H. (2001). 3d anisotropic mesh refinement in compliance with a general metric specification. *Finite Elements in Analysis and Design*, 38, 3–19.
- LOSEILLE, A. et ALAUZET, F. (2009). Continuous mesh model and well-posed continuous interpolation error estimation. Rapport de recherche 6846, INRIA Rocquencourt Thème NUM – Projet Gamma.

- LOSEILLE, A., DERVIEUX, A., FREY, P. et ALAUZET, F. (2007). Achievement of global second order mesh convergence for discontinuous flows with adapted unstructured meshes. *18th AIAA CFD Conf.* Miami, FL, USA, 12 pages.
- MLACNIK, M. J. et DURLOFSKY, L. J. (2006). Unstructured grid optimization for improved monotonicity of discrete solutions of elliptic equations with highly anisotropic coefficients. *Journal of Computational Physics*, 216, 337 – 361.
- NILSSON, H., PAGE, M., BEAUDOIN, M., GSCHAIDER, B. et JASAK, H. (2008). The OpenFOAM turbomachinery working group, and conclusions from the turbomachinery session of the third OpenFOAM workshop. *Proceedings of the 24th IAHR Symposium on Hydraulic Machinery and Systems*.
- PAGE, M., GIROUX, A.-M. et B.MASSÉ (1996). Turbulent swirling flow computation in a conical diffuser with two commercial codes. *Proceedings of CFD'96, Fourth Annual Conference of the CFD Society of Canada, Ottawa, Canada*.
- PAGE, M., GIROUX, A.-M. et B.MASSÉ (1997). Turbulent swirling flow computations in a conical diffuser. *Proceedings of the FIDAP User's Meeting, Burlington, USA*.
- PAIN, C. C., UMPLEBY, A. P., DE OLIVEIRA, C. R. E. et GODDARD, A. J. H. (2001). Tetrahedral mesh optimisation and adaptivity for steady-state and transient finite element calculations. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 190, 3771 – 3796.
- PELLETIER, D. (2008). Verification, validation and uncertainty in computational fluid dynamics. *International Symposium on Uncertainty in Hydraulic Modeling*. Montreal, QC, Canada.
- PELLETIER, D. et ROACHE, P. J. (2002). CFD code verification and the method of manufactured solutions. *Proceedings of the 10th Annual Conference of the CFD Society of Canada*.
- PICASSO, M. (2006). Adaptive finite elements with large aspect ratio based on an anisotropic error estimator involving first order derivatives. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 196, 14–23.
- PIEGL, L. et TILLER, W. (1995). *The NURBS Book*. Springer.
- RANNACHER, R. (1998). A posteriori error estimation in least-squares stabilized finite element schemes. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 166, 99 – 114. Advances in Stabilized Methods in Computational Mechanics.
- RIVARA, M. C. et LEVIN, C. (1992). A 3-d refinement algorithm suitable for adaptive and multi-grid techniques. *Communications in Applied Numerical Methods*, 8, 281–290.
- ROACHE, P. J. (1998). *Verification and Validation in Computational Science and Engineering*. Hermosa Publishers, Albuquerque, New Mexico, USA.

- SHEPHARD, M. S., FLAHERTY, J. E., JANSEN, K. E., LI, X., LUO, X., CHEVAUGEON, N., REMACLE, J.-F., BEALL, M. W. et O'BARA, R. M. (2005). Adaptive mesh generation for curved domains. *Applied Numerical Mathematics*, 52, 251–271.
- SHEWCHUK, J. R. (2002). What is a good linear finite element ? Interpolation, conditioning, anisotropy and quality measures. (unpublished) University of California at Berkeley.
- SIROIS, Y., DOMPIERRE, J., VALLET, M.-G. et GUIBAULT, F. (2010). Hybrid mesh smoothing based on Riemannian metric non-conformity minimization. *Finite Elements in Analysis and Design*, 46, 47–60.
- SZABO, B. et BABUŠKA, I. (1991). *Finite Element Analysis*. John Wiley & Sons Inc., New York.
- TAM, A., AÏT-ALI-YAHIA, D., ROBICHAUD, M. P., MOORE, M., KOZEL, V. et HABASHI, W. G. (2000). Anisotropic mesh adaptation for 3D flows on structured and unstructured grids. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 189, 1205–1230.
- VALLET, M.-G. (1990). Génération de maillages anisotropes adaptés. Application à la capture de couches limites. Rapport technique 1360, Institut National de Recherche en Informatique et en Automatique, France.
- VALLET, M.-G. (1992). *Génération de maillages éléments finis anisotropes et adaptatifs*. Thèse de doctorat, Université Pierre et Marie Curie, Paris VI, France.
- VALLET, M.-G., HECHT, F. et MANTEL, B. (1991). Anisotropic control of mesh generation based upon a Voronoi type method. A. S. Arcilla, J. Häuser, P. R. Eiseman et J. F. Thompson, éditeurs, *Third International Conference on Numerical Grid Generation in Computational Fluid Dynamics and Related Fields*. North-Holland, Barcelona, Spain, 93–103.
- VALLET, M.-G., MANOLE, C.-M., DOMPIERRE, J., DUFOUR, S. et GUIBAULT, F. (2007). Numerical comparison of some Hessian recovery techniques. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 72, 987–1007.
- WILCOX, D. C. (1993). *Turbulence Modeling for CFD*. DCW Industries, Inc.
- YUE, Z. et ROBBINS, D. H. J. (2007). Rank deficiency in superconvergent patch recovery techniques with 4-node quadrilateral elements. *Communication in Numerical Methods in Engineering*, 23, 1–10.
- ZIENKIEWICZ, O. C. (2006). The background of error estimation and adaptivity in finite element computations. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 195, 207 – 213. Adaptive Modeling and Simulation.

ZIENKIEWICZ, O. C. et ZHU, J. Z. (1992a). The superconvergent patch recovery and a posteriori error estimates. Part I : The recovery technique. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 33, 1331–1364.

ZIENKIEWICZ, O. C. et ZHU, J. Z. (1992b). The superconvergent patch recovery and a posteriori error estimates. Part II : Error estimates and adaptivity. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 33, 1365–1382.

ZIENKIEWICZ, O. C., ZHU, J. Z. et WU, J. (1993). Superconvergent patch recovery techniques - some further tests. *Communication in Numerical Methods in Engineering*, 9, 251–258.

ANNEXE A

A UNIVERSAL MEASURE OF THE CONFORMITY OF A MESH WITH RESPECT TO AN ANISOTROPIC METRIC FIELD

Auteurs : P. Labbé, J. Dompierre, M.-G. Vallet, F. Guibault et
J.-Y. Trépanier

Publié dans : International Journal of Numerical Methods in Engineering
ring

On présente ici une mesure capable de comparer un maillage à une carte de taille donnée sous forme de champ de tenseurs symétriques définis positifs interpolé sur un maillage à l'aide d'un interpolant continu. La mesure compare la métrique de la transformation qui rend l'élément régulier à la métrique de la carte de taille. Cette mesure permet de déterminer à quel point un maillage adapté satisfait sa carte de taille. Cette mesure peut servir à comparer des heuristiques d'adaptation de maillage. La mesure peut aussi être utilisée comme fonction coût dans un optimiseur de maillage.

A universal measure of the conformity of a mesh with respect to an anisotropic metric field

P. Labbé^{1,*}, J. Dompierre^{1,‡}, M.-G. Vallet^{1,‡}, F. Guibault^{1,2} and J.-Y. Trépanier^{1,2}

¹Centre de recherche en calcul appliqué (CERCA), 5160, boul. Décarie, bureau 400, Montréal (Québec), H3X 2H9 Canada

²École Polytechnique de Montréal C.P. 6079, Succ. Centre-ville, Montréal (Québec), H3C 3A7 Canada

SUMMARY

In this paper, a method is presented to measure the non-conformity of a mesh with respect to a size specification map given in the form of a Riemannian metric. The measure evaluates the difference between the metric tensor of a simplex of the mesh and the metric tensor specified on the size specification map. This measure is universal because it is a unique, dimensionless number which characterizes either a single simplex of a mesh or a whole mesh, both in size and in shape, be it isotropic or anisotropic, coarse or fine, in a small or a big domain, in two or three dimensions. This measure is important because it can compare any two meshes in order to determine unequivocally which of them is better. Analytical and numerical examples illustrate the behaviour of this measure. Copyright © 2004 John Wiley & Sons, Ltd.

KEY WORDS: triangle; tetrahedra; metric; anisotropy; shape measure; size measure; mesh conformity

1. INTRODUCTION

Mesh adaptivity is a process which generates a sequence of meshes and numerical solutions on these meshes such that the sequence converges to some goal, usually error equirepartition, while minimizing the computational effort by minimizing the number of vertices of the mesh, as stated by Szabo [1]. For unstructured meshes, the process of computing a mesh in the sequence can be decomposed into two steps: first, a size specification map is computed by analysing the numerical solution; second, a mesh is computed that satisfies this size specification map.

The subject of the present paper is to offer a measure of the degree to which a mesh satisfies its size specification map.

*Correspondence to: P. Labbé, Maya HTT, 4999 rue Ste-Catherine O., Bureau 400, Montréal (Québec) H3Z 1T3 Canada.

†E-mail: Paul.Labbe@MayaHTT.com

‡Now at: École Polytechnique de Montréal.

Contract/grant sponsor: NSERC

Contract/grant sponsor: Government of Quebec

Received 21 March 2003

Revised 9 March 2004

Accepted 2 June 2004

Vallet [2, 3] showed that a size specification map using a metric tensor representation eased the generation of adapted and anisotropic meshes by combining the desired size and stretching into a single mathematical concept. Metric tensors modify the way distances are measured. The adapted and anisotropic mesh in the real space is constructed by building a regular, isotropic and unitary mesh in the metric tensor space.

The use of a metric tensor representation for the size specification map is now a widely used tool for the generation and adaptation of anisotropic meshes. It has been used in two and three dimensions, for various PDE simulations with finite element and finite volume methods, and for surface discretization, graphic representation, etc. The most complete references are George and Borouchaki [4] and Frey and George [5] and the references therein.

Most authors rely on two competing measures to assess the quality of their meshes with respect to a size specification map. One measure compares the simplex shape with the specified stretching. This is usually done by computing a shape criterion of the elements in the specified Riemannian metric (see Dompierre *et al.* [6]). But this measure does not take into account the specified size. The other measure is based on the fact that a perfect simplex should be equilateral; therefore, the length of the edges of the simplices should be of unit length in the Riemannian metric. However, having a simplex the edges of which are close to unity in the Riemannian metric does not guarantee a well-shaped simplex. The sliver is a well-known tetrahedron with edges close to the same length, but with a volume which can vanish.

Combining these two competing measures, one of size and one of shape, is a way to measure the metric conformity of a mesh. As an example, Buscaglia and Dari [7] multiply a shape measure with a size measure.

However, the issue of *metric conformity* is still not clear. As stated by Formaggia and Perotto [8], a suitable norm to measure the difference between the metric of a mesh and a specified metric has to be defined. There is no well-defined way to measure *the degree to which a mesh satisfies a size specification map given in the form of a field of metric tensors*.

This paper proposes a new method to measure the degree to which a mesh satisfies a size specification map given in Riemannian metric form. The measure works by evaluating the discrepancy between the metric tensor corresponding to the simplices of the mesh and an averaged metric tensor of what is specified for that region of space on the size specification map. This measure is sensitive to discrepancies in both the size and the shape of the simplices. It is continuous and differentiable, which makes it well suited for optimization purposes. This measure is a unique, dimensionless number which not only completely characterizes, both in size and in shape, a single simplex, but can also be used for a whole mesh in two or three dimensions, coarse or fine, independently of the size of the domain, generated for an isotropic or an anisotropic size specification map.

In Section 2, a brief review of the size specification map is presented. Then, in Section 3, the formula for computing the metric tensor of a simplex is presented. By applying this formula to every simplex of the mesh, a piecewise constant discontinuous metric space can be constructed. In Section 4, the specified Riemannian metric is averaged over each simplex of the mesh in order to produce another piecewise constant discontinuous metric space. In Section 5, a method for measuring the discrepancy between these two metric spaces is explained. This non-conformity measure is extended in Section 6 to cover non-simplicial elements. The non-conformity measure is then shown in Section 7 to be a general form of most quality and efficiency measures in use. In Section 8 this measure is applied to a whole mesh.

Finally, numerical examples are given in Section 9 in order to illustrate the behaviour of this measure.

2. SIZE SPECIFICATION MAP

A central concept used in this paper is the *size specification map*, also called a *size map* or a *control space*. It is used to specify the size, the stretching and the direction of the simplices of the mesh to be built. These specifications can be given in a variety of ways. When written in metric tensor format, the specifications represent the metric tensor of the transformation that would transform the *desired* simplex (the one to be built) into a unit equilateral simplex. This is the most widely used representation for anisotropic mesh generation and mesh adaptation. The usual notations for the components of a metric tensor are

$$\mathcal{M} = \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{12} & m_{22} \end{pmatrix} \text{ in } 2D \quad \text{and} \quad \mathcal{M} = \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} \\ m_{12} & m_{22} & m_{23} \\ m_{13} & m_{23} & m_{33} \end{pmatrix} \text{ in } 3D \quad (1)$$

The length of an edge between vertices A and B in this metric tensor is given by

$$l_{AB} = \sqrt{\vec{AB}^T \mathcal{M} \vec{AB}} \quad (2)$$

In a two-dimensional example, if the metric tensors of the size specification map were $\begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, then the triangle with the vertices $(1, 1)^T$, $(3/2, 1)^T$ and $(5/4, \sqrt{3}/2 + 1)^T$ would seem perfect. Indeed, the length of all of its edges measured in the above metric tensor would be of unit length.

Such a size specification map can be constructed from *a posteriori* error analysis, from geometrical properties of the domain (e.g. curvature), or from user defined inputs, for example. An isotropic size specification map (elements of size h) can be constructed by making the metrics into diagonal matrices, the diagonal terms of which are $1/h^2$. Whatever its origin, the size specification map contains the information on the prescribed size and stretching of the mesh to be built as an anisotropic metric field.

The proposed measure works by comparing the metric value on the size specification map with the metric tensor of the elements of the mesh. The metric tensor of an element is presented in the next section.

3. METRIC TENSOR OF A SIMPLEX

In the previous section, it was shown that the size specification map can be represented in metric format. The metric values stored on the size specification map represent the metric tensor of the transformation that transforms the *desired* element into a unit equilateral element.

This section presents a method to compute the metric tensor \mathcal{M}_K of the transformation that transforms a simplex K into a unit equilateral element. The metric tensor \mathcal{M}_K is sometimes used by itself as a measure of the shape of the simplex K . But, in the current context, the metric tensor \mathcal{M}_K will be compared to the average metric value of the size specification map.

Let T be a transformation which transforms the simplex K from the Euclidean space E with the coordinate system (x, y, z) , into a unit equilateral simplex in the transformed space T with the coordinate system (r, s, t) . All the edges of the transformed simplex are of unit length in space T . The length of the edge between two vertices P_i and P_j of the simplex K in space T is given by

$$d_T^2 = \Delta P_T^T \Delta P_T = (\Delta P_E^T J^T)(J \Delta P_E) = \Delta P_E^T \mathcal{M}_K \Delta P_E \quad (3)$$

where d_T is the length of the edge in the transformed space T , ΔP_E is the vector between the vertices in space E , J is the Jacobian of the transformation of space T with respect to space E and $\mathcal{M}_K = J^T J$ is the metric tensor from space E to space T .

In \mathbb{R}^d , $d = 2$ or 3 , the $d(d+1)/2$ components of the metric tensor are found by solving the following system of Equation [9]

$$(P_j - P_i)^T \mathcal{M}_K (P_j - P_i) = 1 \quad \text{for } 1 \leq i < j \leq d \quad (4)$$

which yields one equation per edge of the simplex. For reasons of symmetry, a two-dimensional metric tensor is specified by three values, and a three-dimensional metric tensor is specified by six values. This corresponds to the number of edges of the simplices, which makes the system of Equations (4) solvable for simplices.

For example, in two dimensions, if the vertices of triangle K are located at $A = (x_A, y_A)^T$, $B = (x_B, y_B)^T$ and $C = (x_C, y_C)^T$, then the system of Equations (4) gives

$$\begin{aligned} m_{11}(x_B - x_A)^2 + 2m_{12}(x_B - x_A)(y_B - y_A) + m_{22}(y_B - y_A)^2 &= 1 \\ m_{11}(x_C - x_A)^2 + 2m_{12}(x_C - x_A)(y_C - y_A) + m_{22}(y_C - y_A)^2 &= 1 \\ m_{11}(x_C - x_B)^2 + 2m_{12}(x_C - x_B)(y_C - y_B) + m_{22}(y_C - y_B)^2 &= 1 \end{aligned} \quad (5)$$

which has a unique solution for all non-degenerate triangles. It is important to note that, although there might exist many transformations that transform triangle K into a unit equilateral triangle, all these transformations have the same metric tensor.

For instance, let the vertices A and B be fixed at $A = (0, 1/2)^T$, $B = (0, -1/2)^T$ and let the vertex $C = (x, y)^T$ be free to move in the half-plane $x \geq 0$. The system of Equation (5) reduces to system

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ x^2 & 2x(y - \frac{1}{2}) & (y - \frac{1}{2})^2 \\ x^2 & 2x(y + \frac{1}{2}) & (y + \frac{1}{2})^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m_{11} \\ m_{12} \\ m_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

which yields:

$$\mathcal{M}_K = \begin{pmatrix} \frac{4y^2 + 3}{4x^2} & \frac{-y}{x} \\ \frac{-y}{x} & 1 \end{pmatrix} \quad (6)$$

This metric tensor, \mathcal{M}_K , becomes identity when the vertex $C(x, y) = (\sqrt{3}/2, 0)^T$, which corresponds to the unit equilateral triangle.

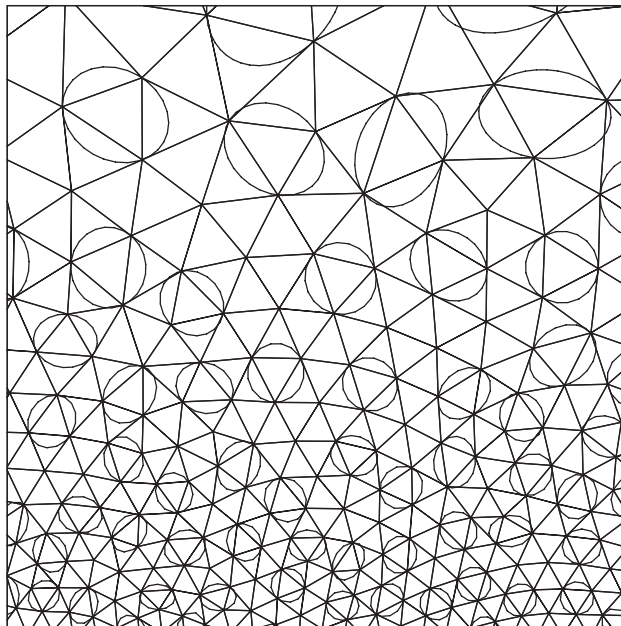


Figure 1. Ellipses associated with the metric tensor of selected simplices.

The metric tensor of a simplex is constant since the transformation T is linear. For non-simplicial elements, the transformation is not linear and the metric is not a constant. The metric of such elements can be linearized by taking into account the simplex stemming from one of the vertices of the element, for example. Otherwise, the analysis that follows must be cast in integral form, as is done in Section 6.

It is usual to visualize the metric tensor as an ellipse. Indeed, the metric tensor can be written as $\mathcal{M}_K = R^{-1}(\theta)\Lambda R(\theta)$, where the matrix Λ is the diagonal matrix of the eigenvalues of \mathcal{M}_K , i.e. $\Lambda = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$. The eigenvalues λ_i are the lengths of the axes of the ellipse and θ is the rotation matrix of the ellipse about the origin. However, it is more telling to draw ellipses of size $1/\sqrt{(3\Lambda)}$, as in Figure 1, where the ellipses of a selected group of elements were drawn. Note in this figure that the ellipses pass through the vertices of the triangle.

By solving the system of Equations (4) for each simplex of the mesh, a piecewise constant discontinuous metric field can be constructed. This can be done in two or three dimensions, and an example has been given for the case of a triangle. In the next section, the way to convert the size specification map into a compatible form is shown. It will then be possible to measure the discrepancy between these two metric fields.

4. AVERAGE OF THE SPECIFIED METRIC TENSOR

As stated earlier, the size specification map is used to specify the size and shape of the simplices of the mesh *to be built*. In metric format, these specifications represent the metric tensor of the transformation that would transform the simplices into unit equilateral simplices.

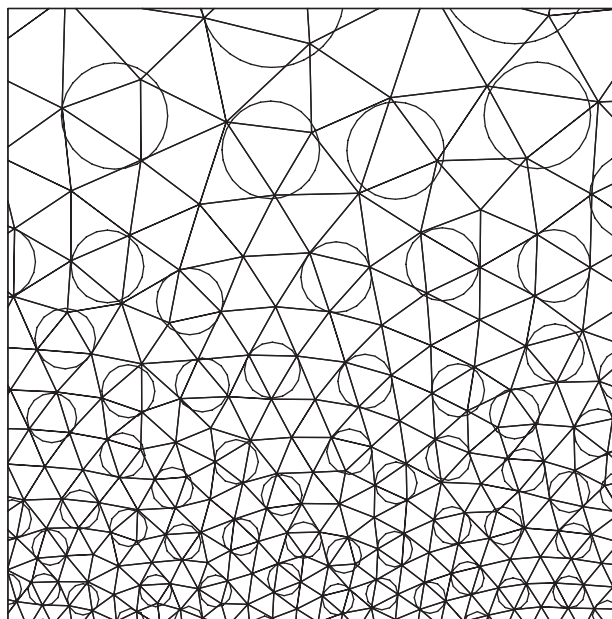


Figure 2. Circles associated with the average of the specified isotropic metric tensor of selected simplices.

The traditional way to use the metric is to measure the length of the edges of the mesh in the metric of the size specification map and to compare that value with 1.0.

In order to compare the metric tensor of a simplex K (cf. Section 3) with what is asked for on the size specification map, an average needs to be computed. Indeed, the simplex K covers a region of space, and the size specification map varies in this region of space. The size specification map is averaged in the following way:

Let $\mathcal{M}_S(X)$ be the specified metric tensor value at point X . Let $\overline{\mathcal{M}}_S(K)$ be the average of the specified metric tensor over a simplex K , as computed by

$$\overline{\mathcal{M}}_S(K) = \left(\int_K \mathcal{M}_S(X) \, dK \right) / \left(\int_K dK \right) \quad (7)$$

This integral can be approximated by a numerical quadrature.

For example, isotropic values for the specified metric tensor correspond to circles, as illustrated in Figure 2. In this figure, the same group of selected elements appearing in Figure 1 is presented, but, this time, the averaged metric tensor that the mesh was supposed to satisfy is presented. It is clear that certain circles do not pass through the vertices of their respective elements.

By averaging the specified Riemannian metric over a simplex, a Euclidean (constant) metric tensor is constructed which corresponds to the average specified tensor. D'Azevedo and Simpson [10] have shown that the best simplex to build for a given metric tensor is a unit equilateral simplex in that metric. The metric tensor of the best element to build for a given averaged

value of the size specification map is therefore the value computed by Equation (7). The next section shows the way to measure the discrepancy between what is specified and what is achieved in the mesh.

5. MEASURING THE NON-CONFORMITY

In Section 3, the way to compute the metric tensor of a simplex in d dimensions was shown. In Section 4, the way to average the specified Riemannian metric in d dimensions over the simplex was shown. In this section, a measure of the discrepancy between these two metrics is presented. Note that this measure is valid for both two and three dimensions, due to the matricial nature of the measure.

When the metric tensor \mathcal{M}_K of the simplex K corresponds exactly to the average of the specified metric tensor $\overline{\mathcal{M}}_S(K)$ for that simplex, the following equality holds:

$$\mathcal{M}_K = \overline{\mathcal{M}}_S(K) \quad (8)$$

However, in practice, there is usually some discrepancy between these two metric tensors, and in this section a method is presented to measure this discrepancy.

Equation (8) can be rewritten in the following two ways:

$$\overline{\mathcal{M}}_S^{-1} \mathcal{M}_K = I \quad \text{and} \quad \mathcal{M}_K^{-1} \overline{\mathcal{M}}_S = I \quad (9)$$

where I is the identity matrix. When there is not a perfect match between what is specified and what is realized, a residual for each of the two previous equations yields the following two tensors:

$$R_s = \overline{\mathcal{M}}_S^{-1} \mathcal{M}_K - I \quad \text{and} \quad R_b = \mathcal{M}_K^{-1} \overline{\mathcal{M}}_S - I \quad (10)$$

where R_s (s for small) is more sensitive to the degeneration of the simplex K as its volume tends to zero and R_b (b for big) is more sensitive to the degeneration of the simplex K as its volume tends to infinity.

To illustrate the behaviour of these residuals, the triangle defined previously is used. We will recall that the triangle had two fixed vertices, one at $A = (0, 1/2)^T$ and one at $B = (0, -1/2)^T$, and that the third vertex was free to move. The metric tensor of this triangle is given by Equation (6). Furthermore, if the specified triangle is the unit equilateral triangle, then, according to Equation (7), the average of the specified metric tensor is equal to the identity matrix, i.e.

$$\overline{\mathcal{M}}_S = \overline{\mathcal{M}}_S^{-1} = I \quad (11)$$

The residuals from Equation (10), with Equations (6) and (11), can be written as

$$R_s(x, y) = I \begin{pmatrix} \frac{4y^2 + 3}{4x^2} & -\frac{y}{x} \\ -\frac{y}{x} & 1 \end{pmatrix} - I = \begin{pmatrix} \frac{4y^2 + 3}{4x^2} - 1 & -\frac{y}{x} \\ -\frac{y}{x} & 0 \end{pmatrix} \quad (12)$$

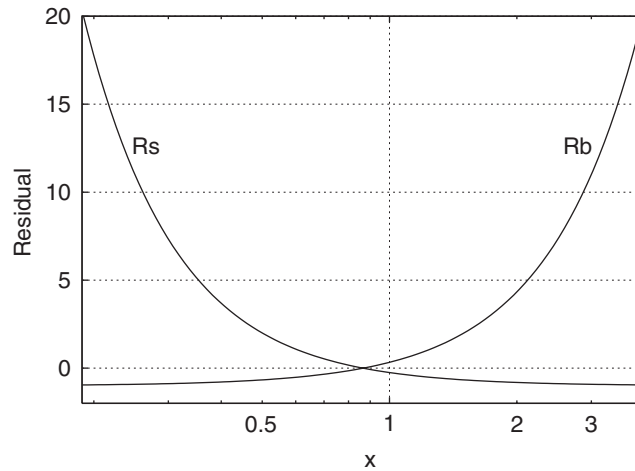


Figure 3. First term of the residuals $R_s(x, 0)$ and $R_b(x, 0)$ (Equations (12) and (13)) as a function of $\log_{10}(x)$.

$$R_b(x, y) = \begin{pmatrix} \frac{4x^2}{3} & \frac{4xy}{3} \\ \frac{4xy}{3} & \frac{4y^2}{3} + 1 \end{pmatrix} I - I = \begin{pmatrix} \frac{4x^2}{3} - 1 & \frac{4xy}{3} \\ \frac{4xy}{3} & \frac{4y^2}{3} \end{pmatrix} \quad (13)$$

If the third vertex C is restricted to the axis $y = 0$, then all but the first term of these tensors vanish. Figure 3 shows the behaviour of the first term of the residuals of the two matrices $R_s(x, 0)$ and $R_b(x, 0)$. The two curves intersect at $x = \sqrt{3}/2$, where the residuals become null. At that point, the triangle corresponds exactly to the specified unit equilateral triangle. The curve of the first term of $R_s(x, 0)$ decreases rapidly and is maximum for the triangle with an area null. Inversely, the curve of the first term of $R_b(x, 0)$ grows rapidly as the area increases. In both cases, the minima of the curves show the influence of the identity matrix as the metric of the simplex, or its inverse, becomes null. It is also worth noting that the two curves are symmetrical with respect to the equilateral triangle, i.e.

$$R_s(x, 0) = R_b(3/(4x), 0) \quad (14)$$

The total residual R_t is defined to be the sum of the two residuals R_s and R_b , where R_s and R_b are given by Equation (10), i.e.

$$R_t = R_s + R_b = \overline{\mathcal{M}}_S^{-1} \mathcal{M}_K + \mathcal{M}_K^{-1} \overline{\mathcal{M}}_S - 2I \quad (15)$$

Definition 1

The non-conformity \mathcal{E}_K of a simplex K with respect to the average of the specified metric tensor is defined to be the Euclidean norm of the total residual (Equation (15)),

$$\mathcal{E}_K = \|R_t\| = \sqrt{\text{tr}(R_t^T R_t)} \quad (16)$$

The Euclidean norm of a matrix $\|\cdot\|$ amounts to the square root of the sum of each term of the matrix individually squared.

The coefficient of non-conformity is sensitive to discrepancies in both size and shape that a simplex K makes with respect to the average of the specified Riemannian metric. Furthermore, this measure is continuous and differentiable, which is a sought after behaviour for optimization purposes. It is valid for simplices in both two and three dimensions, due to the matrix notation used.

For the triangle described above with two fixed vertices and a free vertex, and for which the specified Riemannian metric was the identity matrix, the coefficient of non-conformity is expressed as, from Equations (12) and (13),

$$\mathcal{E}_K = \left[\left(\frac{4y^2 + 3}{4x^2} - 2 + \frac{4x^2}{3} \right)^2 + 2 \left(\frac{4xy}{3} - \frac{y}{x} \right)^2 + \frac{16y^4}{9} \right]^{1/2} \quad (17)$$

Figure 4(a) represents the logarithm base 10 of \mathcal{E}_K when the target metric is the identity matrix as described by Equation (17). It is minimum and equal to zero for the equilateral triangle, and increases very rapidly as the third vertex moves away from the optimal position. It is infinite for all degenerate triangles.

For Figure 4(b), the average of the specified Riemannian metric is half the value of the identity matrix. The edge that is fixed on the $x = 0$ axis is too small by a factor of $\sqrt{2}$. Since this edge is fixed, it will be impossible to obtain the specified triangle simply by moving the third vertex. The minimum value of \mathcal{E}_K is 0.5 and is reached at $X = (\sqrt{3}/2, 0)^T$, which is an intermediate position between the equilateral triangle $(\sqrt{3}/2, 0)^T$ and the optimal area triangle $(\sqrt{3}, 0)^T$. The best triangle in this case is a compromise between the specified size and the specified shape.

For Figures 4(c) and (d), the average of the specified Riemannian metric calls for a rectangle triangle and the minimum value of \mathcal{E}_K is reached at the correct position.

Another example is shown in Figure 5, where the discrepancy between the metric tensors of the selected group of elements in Figure 1 and the isotropic averaged value of the specified metric tensors in Figure 2 is presented. In Figure 5, the colour corresponds to the logarithm base 10 of \mathcal{E}_K (blue corresponds to a small value and red corresponds to a large value).

The constraint of using an averaged value for the size specification map is lifted in the next section in order to deal with non-simplicial elements.

6. EXTENSION TO NON-SIMPLICIAL ELEMENTS

In the previous section, the measure of non-conformity of a simplex was presented. In order to extend this measure to non-simplicial elements, such as quadrilaterals in two dimensions and prisms and hexahedra in three dimensions, it has to be understood that the metric tensor of non-simplicial elements is not a constant and varies for every point of space. Equation (8) takes on a pointwise nature as the conformity of the metric tensor of the element has to be checked against the specified metric tensor at every point X inside the non-simplicial element K . Equation (8), i.e. the conformity between the metric tensor \mathcal{M}_K of a non-simplicial element

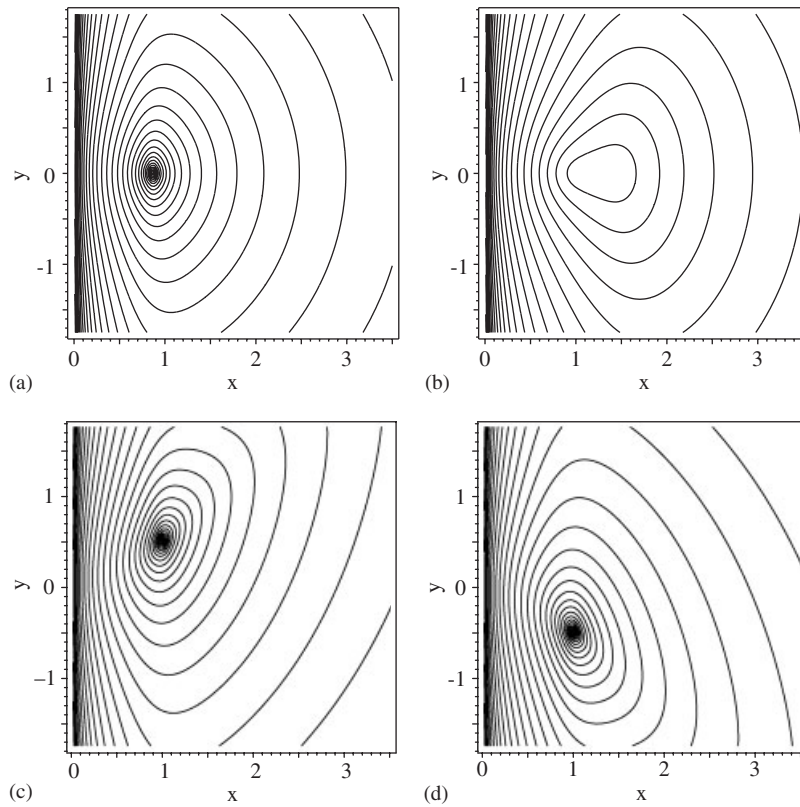


Figure 4. Isolines of $\log_{10}(\mathcal{E}_K)$ with various specified metrics: (a) $\mathcal{M}_S = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $X_{opt} = (\sqrt{3}/2, 0)^T$; (b) $\mathcal{M}_S = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix}$, $X_{opt} = (\sqrt{3}/2, 0)^T$; (c) $\mathcal{M}_S = \begin{pmatrix} 1 & -1/2 \\ -1/2 & 1 \end{pmatrix}$, $X_{opt} = (1, 1/2)^T$; and (d) $\mathcal{M}_S = \begin{pmatrix} 1 & 1/2 \\ 1/2 & 1 \end{pmatrix}$, $X_{opt} = (1, -1/2)^T$.

and the specified metric tensor \mathcal{M}_S , can be rewritten as

$$\mathcal{M}_K(X) = \mathcal{M}_S(X), \quad \forall X \in K \quad (18)$$

The total residual (Equation (15)) becomes a pointwise value and can be averaged over the element K by an integration, as follows:

$$R_t = \int_K (\mathcal{M}_S^{-1}(X) \mathcal{M}_K(X) + \mathcal{M}_K^{-1}(X) \mathcal{M}_S(X) - 2I) dK \bigg/ \left(\int_K dK \right) \quad (19)$$

This equation reduces to Equation (15) for simplicies due to the fact that

$$\frac{\int_K \mathcal{M}_K^{-1}(X) \mathcal{M}_S(X) dK}{\int_K dK} = \mathcal{M}_K^{-1} \frac{\int_K \mathcal{M}_S(X) dK}{\int_K dK} = \mathcal{M}_K^{-1} \overline{\mathcal{M}}_S \quad (20)$$

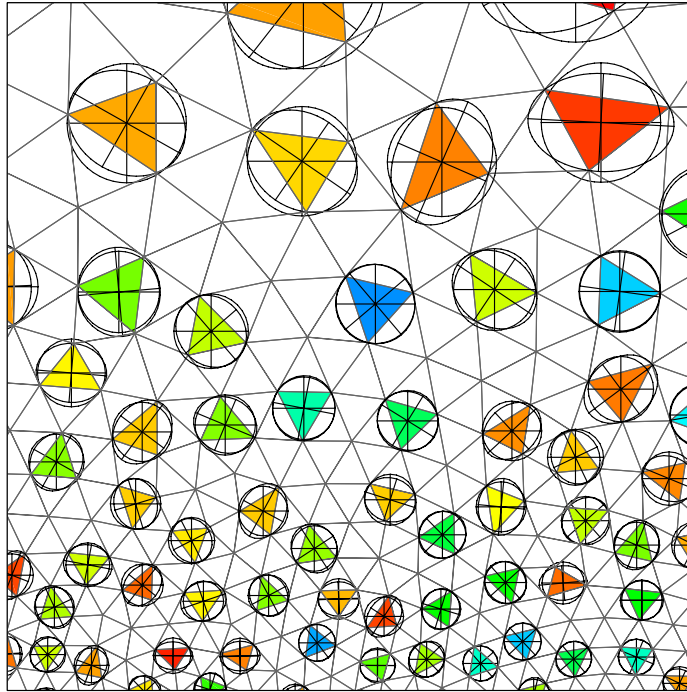


Figure 5. Non-conformity \mathcal{E}_K of selected simplices.

$$\frac{\int_K \mathcal{M}_S^{-1}(X) \cdot \mathcal{M}_K(X) \, dK}{\int_K dK} = \mathcal{M}_K \frac{\int_K \mathcal{M}_S^{-1}(X) \, dK}{\int_K dK} = \mathcal{M}_K \overline{\mathcal{M}}_S^{-1} \quad (21)$$

and if $\mathcal{M}_K(X) = \mathcal{M}_K$ is taken to be a constant over the simplex K . Then, the non-conformity \mathcal{E}_K of an element K with respect to the specified Riemannian metric is defined to be the Euclidean norm of the total residual (19).

Equation (19) is a generalization of Equation (15) and constitutes the most general form of the non-conformity of an element with respect to a size specification map. This formula could be applied not only to non-simplicial elements, but also to higher-order interpolants. Although this formula is rigorous, it is not clear that it is usable due to its cost and its complexity.

7. A GENERAL MEASURE

The non-conformity of a simplex with respect to the average of the specified Riemannian metric is a generalization of many existing efficiency indices and other mesh quality measures used to assess the quality of a mesh. It is shown in this section that the simplex size index of Cuillière [11], the edge efficiency measure of Frey and George [5] and various shape measures such as the condition number of Freitag and Knupp [12] are all measures of some residual from the conformity Equation (8).

7.1. Generalization of the simplex size index

An element-wise size index has been devised by Cuillière in Reference [11]. This index is based on the notion that the size, the area in two dimensions or the volume in three dimensions, of the equilateral simplex in the specified Riemannian metric should be $\sqrt{3}/4$ in two dimensions or $\sqrt{2}/12$ in three dimensions. Indeed,

$$\int_K \sqrt{\det(\mathcal{M}_K)} dK = C_K = \begin{cases} \sqrt{3}/4 & \text{in } 2D \\ \sqrt{2}/12 & \text{in } 3D \end{cases} \quad (22)$$

The size index \mathcal{Q}_K of a simplex K can be written as follows:

$$\mathcal{Q}_K = C C_K^{-1} \int_K \sqrt{\det(\mathcal{M}_S)} dK \quad (23)$$

where C is a constant related to the target element size in the specified Riemannian metric for a fixed number of elements. If an element has the correct size in the specified Riemannian metric, its size index \mathcal{Q}_K is the unit.

This simplex size index is a weak form (an integral form) of the conformity between the metric \mathcal{M}_K of the simplex and the specified metric $\mathcal{M}_S(K)$ (Equation (8)):

$$\mathcal{M}_K = \mathcal{M}_S(K) \Rightarrow \int_K \sqrt{\det(\mathcal{M}_K)} dK = \int_K \sqrt{\det(\mathcal{M}_S(K))} dK \quad (24)$$

and \mathcal{Q}_K is obtained by dividing both sides by C_K . Both \mathcal{E}_K and \mathcal{Q}_K have as their root in Equation (8), but \mathcal{Q}_K is a weaker measure of Equation (8) since it forgoes the matrix nature of the relation by immediately converting the tensor to a scalar.

7.2. Generalization of the edge efficiency index

The edge efficiency index e_{AB} of the edge AB is defined using the length of the edge $L_{\mathcal{M}_S}(AB)$ in the specified Riemannian metric \mathcal{M}_S as

$$e_{AB} = \begin{cases} 1 - L_{\mathcal{M}_S}(AB) & \text{if } L_{\mathcal{M}_S}(AB) \leq 1 \\ 1 - 1/L_{\mathcal{M}_S}(AB) & \text{if } L_{\mathcal{M}_S}(AB) > 1 \end{cases} \quad (25)$$

where the length of the edge in the specified Riemannian metric is

$$L_{\mathcal{M}_S}(AB) = \int_0^1 \sqrt{\gamma'(t) \mathcal{M}_S(\gamma(t)) \gamma'(t)} dt \quad (26)$$

where $\gamma(t) = A + t\overrightarrow{AB}$, $t \in [0, 1]$, $\gamma(0) = A$, $\gamma(1) = B$ is a parameterization of the edge AB . If an edge has the correct size in the specified Riemannian metric, its edge efficiency index e_{AB} is null.

This efficiency index, which can be rewritten as

$$\tilde{e}_{AB} = L_{\mathcal{M}_S}(AB) + \frac{1}{L_{\mathcal{M}_S}(AB)} - 2 \quad (27)$$

to avoid the 'if', can also be derived from the conformity equation (18) as follows:

$$\mathcal{M}_K(X) = \mathcal{M}_S(X) \Rightarrow \int_{AB} \sqrt{AB^T \mathcal{M}_K(X) AB} = \int_{AB} \sqrt{AB^T \mathcal{M}_S(X) AB} \quad (28)$$

The left hand side term is always equal to 1 by definition of $\mathcal{M}_K(X)$. The right hand side term is the length of the edge AB in the specified matrix \mathcal{M}_S . The conformity equation leads then to

$$L_{\mathcal{M}_S}(AB) = 1 \quad (29)$$

which can be rewritten as two residuals:

$$R_1 = 1 - L_{\mathcal{M}_S}(AB) \quad \text{or} \quad R_2 = 1 - 1/L_{\mathcal{M}_S}(AB)$$

the sum of which is \tilde{e}_{AB} . Both \mathcal{E}_K and \tilde{e}_{AB} originate from Equation (18), but \tilde{e}_{AB} takes into account only the edges of the element K where \mathcal{E}_K depends of the whole element K .

7.3. Generalization of various shape measures

The non-conformity of a simplex with respect to the average of the specified Riemannian metric is null for a perfectly matched simplex, and it tends to infinity if the simplex degenerates, or if the average of the specified Riemannian metric degenerates.

A simplex shape measure, by contrast, evaluates the shape of a simplex K independently of the specified Riemannian metric; it is maximum for an equilateral simplex, and tends to zero as the simplex degenerates [13, 14].

Freitag and Knupp [12] propose the condition number κ of the metric \mathcal{M}_K of the simplex K , as a quality measure:

$$\kappa = \sqrt{\text{tr}(\mathcal{M}_K) \text{tr}(\mathcal{M}_K^{-1})} = \sqrt{\text{tr}(\Lambda_K) \text{tr}(\Lambda_K^{-1})} \quad (30)$$

since all metrics can be written as

$$\mathcal{M} = R \Lambda R^{-1} \quad (31)$$

where R is a rotation matrix formed by the eigenvectors of \mathcal{M} and Λ_K again forms the diagonal matrix of eigenvalues of \mathcal{M}_K . Expanding the trace of a diagonal matrix, the latter equation of κ becomes

$$\kappa = \sqrt{\left(\sum_i \lambda_{K,i} \right) \left(\sum_i \lambda_{K,i}^{-1} \right)} \quad (32)$$

The κ shape measure is of unit value for the equilateral simplex when all $\lambda_{K,i}$ are equal, and tends to infinity as the simplex degenerates.

As noted by Dompierre *et al.* [6] and Shewchuk [15], κ is actually a reformulation of the η shape measure in two dimensions, as presented by Liu and Joe [13]. Indeed, $\eta = 2/\kappa$ satisfies the definition of a shape measure as defined in Reference [14]. These two shape measures do not take into account the size specification map. Also, they are dimensionless quantities. Expressing them in the metric field associated with a size specification map also leads to a dimensionless quantity. A simplex can be of perfect shape, but not of perfect size.

The new coefficient of non-conformity of a simplex introduced in this paper is sensitive to the size specification map specified through a metric tensor. Even if it is a dimensionless value, it is sensitive to the size of the simplices, and a perfectly shaped simplex of the wrong size will have a positive non-conformity coefficient.

In the next two subsections, the coefficient of non-conformity will be expressed in terms of the eigenvalues of the metric of the simplex for two size specification maps. The first is that of a simplex of equilateral unit size, while the other will be for a size specification map and a simplex having $R = I$ in Equation (31).

7.3.1. Equilateral simplex. If the size specification map specifies an equilateral unit simplex, then $\mathcal{M}_S = I$. The total residual R_t becomes

$$\begin{aligned} R_t &= \mathcal{M}_K - I + \mathcal{M}_K^{-1} - I \\ &= R\Lambda_K R^{-1} + R\Lambda_K^{-1} R^{-1} - 2I \\ &= R(\Lambda_K + \Lambda_K^{-1} - 2I)R^{-1} \\ &= R((\Lambda_K - I)^2 \Lambda_K^{-1})R^{-1} \end{aligned}$$

The coefficient of non-conformity \mathcal{E}_K (Equation (16)) then becomes

$$\mathcal{E}_K = \sqrt{\text{tr}(R_t^T R_t)} = \sqrt{\text{tr}(R((\Lambda_K - I)^2 \Lambda_K^{-1})^2 R^{-1})} \quad (33)$$

since $\Lambda^T = \Lambda$ and $R^{-1} = R^T$. It can be simplified as

$$\mathcal{E}_K = \sqrt{\sum_i ((\lambda_{K,i} - 1)^2 / \lambda_{K,i})^2} \quad (34)$$

where $\lambda_{K,i}$ are the entries of the diagonal matrix Λ_K . In this case, where the size specification map is an equilateral unit simplex, the coefficient of non-conformity (Equation (34)) looks like the condition number κ (Equation (32)). A notable difference with the condition number κ is that the target unit size is embedded in the numerator of the coefficient of non-conformity. A non-unitary, perfectly shaped simplex will have a positive non-conformity coefficient. The condition number κ on the other hand will be minimum for all equilateral elements even if they are not of the specified size.

7.3.2. Size specification map and simplex with $R = I$. If the metric of the simplex \mathcal{M}_K and the average of the specified metric \mathcal{M}_S have $R = I$, i.e. $\mathcal{M}_K = \Lambda_K$ and $\mathcal{M}_S = \Lambda_S$ in Equation (31), then the total residual is given by

$$\begin{aligned} R_t &= \mathcal{M}_S^{-1} \mathcal{M}_K - I + \mathcal{M}_K^{-1} \mathcal{M}_S - I \\ &= \Lambda_S^{-1} \Lambda_K - I + \Lambda_K^{-1} \Lambda_S - I \\ &= (\Lambda_S - \Lambda_K)^2 \Lambda_K^{-1} \Lambda_S^{-1} \end{aligned}$$

The coefficient of non-conformity \mathcal{E}_K (Equation (16)) then becomes

$$\mathcal{E}_K = \sqrt{\sum_i \left(\frac{(\lambda_{K,i} - \lambda_{S,i})^2}{\lambda_{K,i} \lambda_{S,i}} \right)^2} \quad (35)$$

This equation is clearly a generalization of Equation (34). The coefficient of non-conformity of this simplex is minimum when the eigenvalues of the metric of the simplex correspond to those of the specified metric of the size specification map. Otherwise, the measure degenerates as either the simplex or the size specification map degenerates. The symmetry between the eigenvalues of the metric of the simplex and those of the metric of the size specification map is also clearly expressed.

8. NON-CONFORMITY OF THE MESH

A measure of the non-conformity $\mathcal{E}_{\mathcal{T}}$ of a mesh \mathcal{T} is devised. It uses the coefficient of non-conformity of a simplex and is built so as to be independent of the number of simplices.

Definition 2

The coefficient of non-conformity $\mathcal{E}_{\mathcal{T}}$ of a mesh \mathcal{T} is defined as

$$\mathcal{E}_{\mathcal{T}} = \frac{1}{n_K} \sum_{i=1}^{n_K} \mathcal{E}_{K_i} \quad (36)$$

which is the average value of the coefficient of non-conformity of the n_K simplices of the mesh.

This seems to be an adequate measure of the discrepancy of a mesh with respect to a specified size specification map given in the form of a Riemannian metric. By taking into account the number of simplices, the coefficient of non-conformity of the mesh can compare two different meshes. For instance, let the domain to be discretized be in the shape of an equilateral triangle the edges of which are of length equal to two, and let the average of the specified metric be the identity matrix ($\mathcal{M}_S = I$). The perfect mesh for this problem consists of four unit equilateral triangles as the middle mesh of Figure 6(b). This mesh corresponds exactly to what is asked, and there is no discrepancy between what is asked and what is achieved. Now consider the two following meshes for this problem, one composed of just one

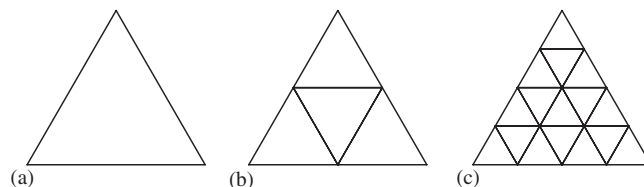


Figure 6. If the target mesh is the middle mesh, the coefficients of non-conformity of the first and last meshes are equivalent: (a) coarse mesh; (b) perfect mesh; and (c) fine mesh.

triangle as the first mesh of Figure 6(a), and the other composed of sixteen equilateral triangles as the last mesh of Figure 6(c). In the case of the single triangle mesh, the triangle is too big and there is a discrepancy between what is asked for and what is realized. The coefficient of non-conformity of this mesh as computed by Equations (36) and (16) is

$$\mathcal{E}_{\Omega_1} = \mathcal{E}_{K_1} = \frac{9}{4} \sqrt{2} \quad (37)$$

since $\mathcal{M}_K = \text{diag}(1/4, 1/4)$. In the case of the mesh composed of sixteen triangles, all the triangles are too small. Each triangle will have a coefficient of non-conformity equal to

$$\mathcal{E}_{\Omega_{16}} = \frac{1}{16} \sum_{i=1}^{16} \mathcal{E}_{K_i} = \frac{9}{4} \sqrt{2} \quad (38)$$

according to Equations (36) and (16) with $\mathcal{M}_K = \text{diag}(4, 4)$. The symmetrical nature of the coefficient of non-conformity with respect to the optimal value implies that $\mathcal{E}_{\Omega_1} = \mathcal{E}_{\Omega_{16}}$. These two meshes will have the same average value for the coefficient of non-conformity of their simplices. This makes them equivalent in the sense that they both disrespect the size specification map by the same average quantity.

The perfect mesh is obtained when the coefficient of non-conformity of the mesh vanishes. Note that if one simplex of the mesh degenerates, then $\mathcal{E}_{\mathcal{T}}$ tends to infinity.

Finally, the coefficient of non-conformity of a mesh is insensitive to compatible scaling of both the mesh and the specified Riemannian metric. It is possible, using this measure, to compare the quality of the mesh of two vastly different domains, such as the mesh of an ocean and the mesh of a micro-circuit. In both cases, the measure gives a comparable number which reflects the degree to which each mesh satisfies its size specification map.

This coefficient therefore constitutes a unique and dimensionless measure of the non-conformity of a mesh with respect to a size specification map given in the form of a Riemannian metric, be it isotropic or anisotropic. It is valid for meshes of triangles or tetrahedra, or any other non-simplicial elements.

9. NUMERICAL EXAMPLES

The coefficient of non-conformity for a mesh is used to evaluate the degree to which a mesh satisfies its size specification map. Two numerical examples are used, one using an isotropic size specification map and one using an anisotropic size specification map. The goal is to evaluate the ability of the coefficient of non-conformity of a mesh to yield a dimensionless number that uniquely characterizes the quality of the mesh.

The numerical examples are the ones presented in George and Borouchaki [4] concerning the generation of isotropic and anisotropic meshes in a $[0, 7] \times [0, 9]$ rectangular domain. The coefficient of non-conformity of the mesh is given, along with statistical information on the length of the edges measured using the Riemannian metric and the η shape measure presented in Liu [13]:

$$\eta = d(\det(\Lambda_K))^{1/d} / \text{tr}(\Lambda_K) \quad (39)$$

where Λ_K is the diagonal matrix of eigenvalues of \mathcal{M}_K . The η shape measure is expressed in terms of edge lengths as in Dompierre [6], and the edge lengths are also measured using the

Riemannian metric. The η shape measure is therefore a measure of the shape in the Riemannian metric.

9.1. Isotropic test case

The first test case has an isotropic Riemannian metric defined by

$$\mathcal{M}_S = \begin{pmatrix} h_1^{-2}(x, y) & 0 \\ 0 & h_2^{-2}(x, y) \end{pmatrix} \quad (40)$$

where $h_1(x, y) = h_2(x, y) = h(x, y)$ is given by

$$h(x, y) = \begin{cases} 1 - 19y/40 & \text{if } y \in [0, 2] \\ 20^{(2y-9)/5} & \text{if } y \in]2, 4.5] \\ 5^{(9-2y)/5} & \text{if } y \in]4.5, 7] \\ \frac{1}{5} + \frac{4}{5} \left(\frac{y-7}{2} \right)^4 & \text{if } y \in]7, 9] \end{cases} \quad (41)$$

The mesh is obtained by using the $\text{OO}\mathcal{RT}$ (Object-Oriented Remeshing Toolkit), a mesh optimization package developed at CERCA. The optimization performs refinement, coarsening, vertex relocation and edge swapping. The resulting mesh is presented in Figure 7(a). Table I gives standard statistical values (minimum, average, maximum and standard deviation) of the length of the edges and of the η shape measure of the triangles. All the values are measured in the Riemannian metric of the size specification map. As stated in the introduction, these values evaluate the size and shape of the simplices of the mesh. The coefficient of non-conformity (Equation (36)) of this mesh with respect to the size specification map shown in Figure 7(b) is $\mathcal{C}_{\mathcal{T}} = 0.1041$. Two other meshes are presented to illustrate the behaviour of the measure. Figure 7(c) is obtained by aiming for a mesh with edges that measure 1.4 on the size specification map. All the elements will therefore be too big, as is evident by the fact that the number of segments on the lower boundary is now 5 instead of 7 for the mesh presented in Figure 7(a). The non-conformity measure of the mesh in Figure 7(c) with respect to the size specification map shown in Figure 7(b) is $\mathcal{C}_{\mathcal{T}} = 3.82$. Figure 7(d) presents a structured mesh concentrated along the y axis so as to respect the size specification map. The mesh is then divided into triangles. The density of the mesh is too low when the diagonal is at an angle lower than 45° , and the density is too high when the angle is more than 45° . The non-conformity measure of the mesh in Figure 7(d) with respect to the size specification map shown in Figure 7(b) is $\mathcal{C}_{\mathcal{T}} = 12.1$. These tests illustrate the very high sensitivity of the measure to the mesh conformity.

It is important to note that the coefficient of non-conformity of the mesh would not change if the domain of the previous example were a $[0, 70] \times [0, 90]$ rectangular domain (10 times bigger), and that the target function given in Equation (41) would also be multiplied by 10.

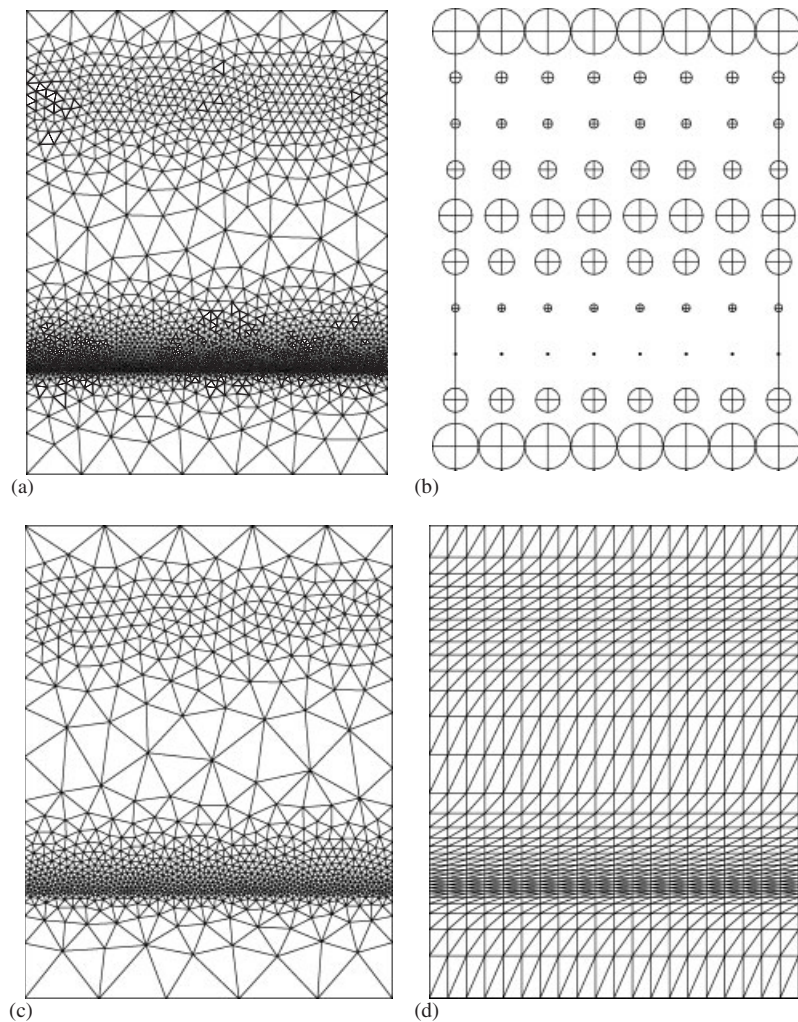


Figure 7. Mesh obtained using the isotropic metric tensor given by Equation (41): (a) mesh optimized in shape and in size, $\mathcal{E}_{\mathcal{T}} = 0.1041$; (b) size specification map; (c) good shape, but incorrect size $\mathcal{E}_{\mathcal{T}} = 3.82$; and (d) structured mesh divided in triangles $\mathcal{E}_{\mathcal{T}} = 12.1$.

Table I. Quality indicators evaluated in the Riemannian metric given by Equation (41) for the mesh in Figure 7(a).

Indicator	Nb of items	Min	Average	Max	Std. Dev.
Edge length	6326	0.789	0.998	1.31	0.076
η	4189	0.880	0.982	1.00	0.018

9.2. Anisotropic test case

The second test case is anisotropic and its Riemannian metric is given by Equation (40), where $h_1(x, y)$ and $h_2(x, y)$ are given by

$$h_1 = \begin{cases} 1 - 19x/40 & \text{if } x \in [0, 2], \\ 20^{(2x-7)/3} & \text{if } x \in]2, 3.5], \\ 5^{(7-2x)/3} & \text{if } x \in]3.5, 5], \\ \frac{1}{5} + \frac{4}{5} \left(\frac{x-5}{2} \right)^4 & \text{if } x \in]5, 7], \end{cases} \quad h_2 = \begin{cases} 1 - 19y/40 & \text{if } y \in [0, 2] \\ 20^{(2y-9)/5} & \text{if } y \in]2, 4.5] \\ 5^{(9-2y)/5} & \text{if } y \in]4.5, 7] \\ \frac{1}{5} + \frac{4}{5} \left(\frac{y-7}{2} \right)^4 & \text{if } y \in]7, 9] \end{cases} \quad (42)$$

The $\text{OO}\mathcal{RT}$ package is used again to obtain the mesh in Figure 8. Table II gives the usual quality indicators evaluated in the Riemannian metric of the size specification map. The coefficient of non-conformity (Equation (36)) of this mesh with respect to the size specification map shown in Figure 8(b) is $\mathcal{E}_{\mathcal{T}} = 0.146$. Two other meshes are presented to illustrate the behaviour of the measure for anisotropic meshes. Figure 8(c) is obtained by aiming for a mesh with edges that measure 1.5 on the size specification map. All the elements will therefore be too big, as evidenced by the fact that the number of segments on the lower boundary is now 17 instead of 23 for the perfect mesh shown in Figure 8(a). The non-conformity measure of the mesh in Figure 8(c) with respect to the size specification map shown in Figure 8(b) is $\mathcal{E}_{\mathcal{T}} = 1.93$. Figure 8(d) presents a mesh optimized by disabling the vertex relocation scheme. The mesh is the correct size, but the shape of the elements is not good. The non-conformity measure of the mesh in Figure 8(d) with respect to the size specification map shown in Figure 8(b) is $\mathcal{E}_{\mathcal{T}} = 0.63$. Although the elements of the mesh presented in Figure 8(c) seem more appealing, the mesh in Figure 8(d) is a better fit to the size specification map.

It is also important to note here that the coefficient of non-conformity of the mesh does not change when the domain is scaled to a $[0, 70] \times [0, 90]$ rectangular domain (10 times bigger), along with a corresponding scaling of the target functions given in Equations (42) by a factor of 10.

The two meshes in Figures 7 and 8 are quite different, since they are supposed to satisfy two different Riemannian metrics. But, since they were obtained by the same algorithm, they have the same quality when it comes to respect of the Riemannian metric corresponding to the size specification map. We can conclude that the algorithm used by the optimizer is not influenced by the isotropic or anisotropic nature of the Riemannian metric.

10. CONCLUSION

In this paper, a method has been presented to measure the non-conformity of a simplex and of a whole mesh with respect to a size specification map given in the form of a Riemannian metric. This measure is sensitive to discrepancies in both size and shape with respect to what is specified. Analytical examples of the behaviour of the measure were presented and numerical examples were provided.

This measure is a keystone in mesh research. *It is universal because it is a unique dimensionless number that characterizes a whole mesh both in size and in shape, be it isotropic or anisotropic, coarse or fine, in a small or a big domain, in two or three dimensions.* The

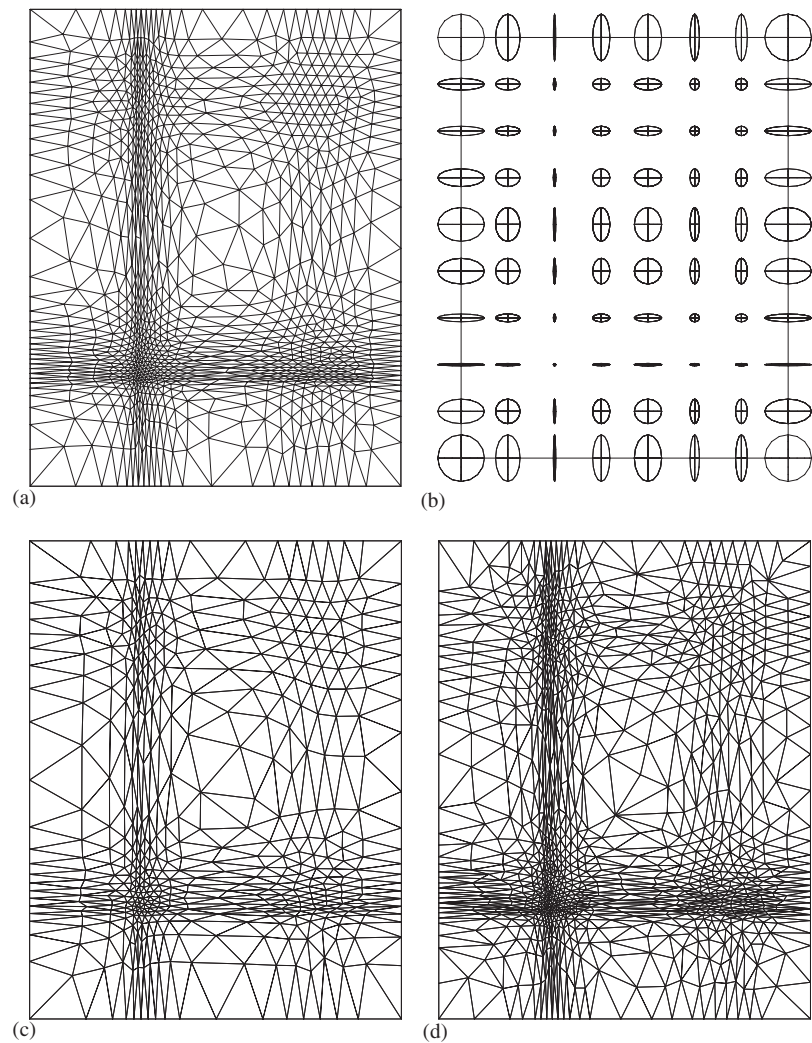


Figure 8. Mesh obtained using the anisotropic metric given by Equation (42): (a) mesh optimized in shape and in size $\mathcal{E}_{\mathcal{T}} = 0.146$; (b) size specification map; (c) good shape, but incorrect size $\mathcal{E}_{\mathcal{T}} = 1.93$; and (d) good size, but incorrect shape $\mathcal{E}_{\mathcal{T}} = 0.63$.

Table II. Quality indicators evaluated in the Riemannian metric given by Equation (42) for the mesh in Figure 8(a).

Indicator	Nb of items	Min	Average	Max	Std. Dev
Edge length	3238	0.768	1.022	1.35	0.071
η	2119	0.806	0.985	1.00	0.020

measure can be used to evaluate any and all existing meshes for which a size specification map is available.

Furthermore, this measure constitutes a natural measure to use in the benchmarking process. Indeed, since the measure is able to compare two different meshes, it can help compare the algorithms used to produce the meshes.

Finally, this measure of the non-conformity of a mesh seems to be an adequate cost function for mesh generation, mesh optimization and mesh adaptation. Work is under way to use this measure for each step of the mesh optimizer, specifically in the vertex relocation scheme.

ACKNOWLEDGEMENTS

The authors would like to thank the NSERC for its support of this research in the form of individual grants to the last two authors. They would also like to acknowledge the gracious use of VU (<http://www.invisu.ca>), the software package used to draw all the images including the metric tensors. Finally, they would like to thank the Government of Quebec for funding the now defunct Center for Research on Computation and its Applications (CERCA) from 1991 to 2003, where this work was done.

REFERENCES

1. Szabo B, Babuška I. *Finite Element Analysis*. Wiley: New York, 1991.
2. Vallet M-G. Génération de maillages anisotropes adaptés. Application à la capture de couches limites. *Technical Report 1360*, Institut National de Recherche en Informatique et en Automatique, France, December 1990.
3. Vallet M-G, Hecht F, Mantel B. Anisotropic control of mesh generation based upon a Voronoi type method. *In Third International Conference on Numerical Grid Generation in Computational Fluid Dynamics and Related Fields*, Arcilla AS, Häuser J, Eiseman PR, Thompson JF (eds), (Barcelona, Spain). North-Holland: Amsterdam, June 1991; 93–103.
4. George P-L, Borouchaki H. *Delaunay Triangulation and Meshing. Applications to Finite Elements*. Hermès: Paris, 1998.
5. Frey PJ, George P-L. *Mesh Generation. Application to Finite Elements*. Hermès: Paris, 2000.
6. Dompierre J, Labbé P, Vallet M-G, Guibault F, Camarero R. Critères de qualité pour les maillages simpliciaux. *Maillage et adaptation*, George P-L (ed.). Hermès: Paris, 2001; 311–348.
7. Buscaglia GC, Dari EA. Anisotropic mesh optimization and its application in adaptivity. *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 1997; **40**:4119–4136.
8. Formaggia L, Perotto S. Anisotropic error estimator for finite element methods. *31st Computational Fluid Dynamics*, Lecture Series 2000–05, von Karman Institute for Fluid Dynamics, 2000.
9. Vallet M-G. Génération de maillages éléments finis anisotropes et adaptatifs. *Ph.D. Thesis*, Université Pierre et Marie Curie, Paris VI, France, 1992.
10. D'Azevedo EF, Simpson RB. On optimal triangular meshes for minimizing the gradient error. *Numerische Mathematik* 1991; **59**:321–348.
11. Cuillière J-C. An adaptive method for the automatic triangulation of 3D parametric surfaces. *Computer-Aided Design* 1998; **30**(2):139–149.
12. Freitag L, Knupp PM. Tetrahedral element shape optimization via the Jacobian determinant and condition number. *Eighth International Meshing Roundtable*, South Lake Tahoe, CA, Sandia National Laboratories, 1999; 247–258.
13. Liu A, Joe B. Relationship between tetrahedron shape measures. *Journal Bit* 1994; **34**(2):268–287.
14. Dompierre J, Labbé P, Guibault F, Camarero R. Proposal of benchmarks for 3D unstructured tetrahedral mesh optimization. *Seventh International Meshing Roundtable*, Dearborn, MI, Sandia National Laboratories, 1998; 459–478.
15. Shewchuk JR. What is a good linear finite element? *Interpolation, Conditioning, Anisotropy and Quality Measures*. University of California at Berkeley: CA, 2002.

ANNEXE B

VERIFICATION OF A THREE-DIMENSIONAL ANISOTROPIC ADAPTATION METHOD BY LOCAL MESH MODIFICATION

Auteurs : P. Labbé, J. Dompierre, M.-G. Vallet et F. Guibault

Soumis à : International Journal of Numerical Methods in Engineering

Soumis le : 15 janvier 2010

La vérification d'un processus adaptatif nécessite tout d'abord d'exprimer le but de l'adaptation de maillage. Dans ce papier, on montre que le principe d'équirépartition de l'erreur se mesure en caractérisant la distribution des erreurs d'approximation élémentaire en norme L_∞ . Muni de cette mesure, on montre que la vérification du processus adaptatif consiste en la vérification de la reconstruction du Hessien, dans la convergence de la mesure de non-conformité du maillage, et dans la vérification du processus global. On compare des approches uniformes, isotropes et anisotropes sur des solutions manufacturées en 2D et en 3D.

Cet article a été soumis le 15 janvier 2010 à l'International Journal of Numerical Methods in Engineering. Les reviewers ont demandé des corrections avec relecture. L'article a été revue afin de mettre l'emphasis sur la méthodologie de vérification du processus adaptatif, sur l'identification des hypothèses mathématiques à vérifier et sur les mesures permettant de vérifier ces hypothèses. On a identifié trois hypothèses : 1-le processus adaptatif converge vers le maillage optimal, 2-la reconstruction peut être utilisée à la place de la solution exacte, 3-les maillages adaptées sont conformes à la carte de taille. La stratégie de vérification de l'optimalité du maillage adapté se fait par la mesure de l'écart-type de l'erreur d'interpolation sur le maillage convergé ainsi que par des histogrammes de l'erreur d'interpolation élémentaire en norme L^∞ . La stratégie de vérification de la reconstruction se fait par des études de convergence de la différence entre le Hessien de la reconstruction et le Hessien de la solution exacte. La stratégie de vérification du maillage adapté consiste à mesurer la non-conformité du maillage par rapport à la carte de taille que le maillage est censé satisfaire. Cette version corrigée a été resoumis le 28 septembre 2010 à l'International Journal of Numerical Methods in Engineering.

Verification of a three-dimensional anisotropic adaptation method by local mesh modification

Paul Labbé^{1,2}, Julien Dompierre³, Marie-Gabrielle Vallet¹ and François Guibault^{1,*}

¹Computer and Software Engineering Department, École Polytechnique de Montréal, P.O. Box 6000, succursale Centre Ville, Montréal, QC, Canada, H3C 3A7

²Institut de recherche d'Hydro-Québec, 1800, boulevard Lionel-Boulet, Varennes, Québec, J3X 1S1

³Department of Mathematics and Computer Science, Laurentian University, 935, Ramsey Lake Road, Sudbury, ON, Canada, P3E 2C6

SUMMARY

This paper describes a novel verification methodology to assess the precision and convergence of an anisotropic adaptive process as it applies to control the interpolation error of sample 2D and 3D reaction-diffusion problems. To do so, the technique of Manufactured Solution is used to devise a problem for which the analytical solution is known. The convergence rate of the Hessian-based error estimator used in this unstructured mesh adaptation method is first evaluated through mesh convergence studies. Two distinct mesh quality measures are then used to illustrate mesh improvement in the course of adaptation. Finally, the overall adaptive process is verified by measuring the convergence rate of the interpolation error as well as measuring how evenly the interpolation error is distributed over all the elements of the adapted meshes. This verification process first demonstrates that each component of the adaptation process converges at a rate predicted by theory, and second how effective anisotropic adaptation is to reduce the number of nodes needed to achieve a prescribed error level. The proposed verification methodology constitutes a quantitative approach to compare mesh adaptation algorithms among them, both in terms of efficiency and quality of the resulting mesh. Copyright © 2000 John Wiley & Sons, Ltd.

Keywords: Verification, Unstructured Mesh, Mesh Adaptation, Anisotropy, Manufactured solution, Interpolation error

1. Introduction

In finite element modeling, anisotropic adaptive methods are those that automatically construct meshes that allow achieving a desired accuracy level while minimizing computational work [1] through appropriate vertex placement and connection, generally based on an adequate a posteriori analysis of a previously computed solution. This process, which results in an unstructured stretched adapted mesh, is well documented and has been realized with varying degrees of success for two- and three-dimensional problems [2]. Li et al. [3] describe three basic adaptive methodologies, namely:

*Correspondence to: Computer and Software Engineering Department, École Polytechnique de Montréal, P.O. Box 6000, succursale Centre Ville, Montréal, QC, Canada, H3C 3A7

- Adaptive remeshing methods [4, 5, 6]
- Element subdivision methods [7, 8]
- Fixed order mesh modification procedures [9, 10, 11, 12, 13]

While adaptive remeshing methods generate an entirely new mesh at each solution step, thereby incurring the full cost of discretizing the complete domain at each step, subdivision methods on their part, are limited to refining existing elements and merging previously refined elements, and can not therefore coarsen a mesh past its initial density. The third approach, modifies an existing mesh by applying mesh modification operators in a fixed order.

All these mesh modification methodologies closely mimic an iterative partial differential equation (PDE) solving process, in the sense that they locally apply corrections to the result of a previous iteration, in this case the previous mesh, in order to reduce or equidistribute a residual determined using an error estimator. Under this perspective, all the adaptive methods can be seen as an integral part of the PDE solution process, in which both the solution and the mesh are iteratively converged until the fixed point for the mesh-solution couple is attained [15, 2]. In this context, mesh modification procedures should require fewer operations as the adaptive process converges then remeshing methods.

In recent years, much attention has been placed on the verification and validation of numerical simulation processes for various types of PDE solvers. While verification aims to assess whether equations are solved correctly, validation, on the other hand, aims to assess whether the correct equations are solved. Validation therefore relates to the accurate modeling of a physical phenomenon, and can only be carried out through comparison with experimental measurements, once code verification has been properly carried out.

Verification is essentially a computer science and mathematical issue by which a computer program is checked to ensure that no algorithmic or grammatical errors are left in the code and that theoretical convergence rates are recovered. This process has been applied for instance to finite element [16] and finite volume flow solvers [17] and has allowed to assess the performance of various numerical schemes and their dependence to mesh quality. Systematic approaches based on the use of manufactured solutions are now documented, that allow verification of solvers for complete sets of equations as complex as two-equation RANS flow simulations [18, 19]. Code verification inherently implies the capacity to compute grid-independent solutions through systematic grid refinement studies, as pioneered, for instance by Roach [20]. Recently, Hay et al. [16] have shown how adaptive remeshing methods can contribute to computing grid-independent solutions through mesh adaptation at a much lower computational cost than systematic grid refinement.

However, fixed order mesh modification procedures have not been systematically verified using recognized verification methodology. The present paper tackles the challenges posed by the verification of anisotropic adaptive methods using the techniques described by Roach in [20]. This methodology will serve to compare three completely different adaptive algorithms: a uniform refinement, an isotropic adaptation and an anisotropic adaptation.

To do so, an iterative process using a fixed order mesh modification procedure is implemented whose overall goal is to control the interpolation error of the numerical solution while minimizing the total number of elements and the computational cost in the hope of controlling the approximation error of the numerical solution. Given a mesh of a BRep solid model, the main steps of this iterative process are:

1. Compute a numerical solution to a well posed PDE using an external equation solver

- (e.g. finite element or finite volume solver).
2. Compute an error estimate using a recovered Hessian of the numerical solution.
 3. Convert the error estimate into a size specification map.
 4. Adapt the mesh so that it satisfies the size specification map.
 5. Iterate steps 1 to 4 until some measure of convergence has been attained.

The first step above is usually performed by a third party tool such as a commercial or industrial equation solver. The verification procedure assumes that the equation solver has been verified. It is outside the scope of this paper to characterize the accuracy of these third party tools. Therefore, in the context of the present investigation, the first step is replaced by computing a finite element projection of an analytical solution obtained by the technique of Manufactured Solution presented in [20]. These manufactured solutions will be defined on simple geometries in order to focus on the verification methodology itself. This step is detailed in Sec. 2 along with justifications as to why this is still representative of practical engineering applications.

The second step of the iterative adaptation process computes an error estimate of the numerical solution using a Hessian based approach to model the interpolation error. The Hessian is recovered from the solution using the methods presented in [21]. Since the numerical experiments have analytical solutions, it is possible to compare the recovered Hessian with the exact Hessian and thus confirm the quality of the error estimator used in mesh adaptation. This is investigated in Sec 3.

Once an appropriate error estimator has been computed for the problem, the next step adapts the mesh in order to match the requirements of the metric obtained from the error estimator[†]. Using the non-conformity measure presented in [22], it is possible to evaluate the quality of the adapted mesh and thus validate the efficiency of the adaptation process to produce a mesh that satisfies the information provided by the error estimator. This will be presented in Sec 5.

Finally, the overall goal of controlling the interpolation error is assessed in the last section by performing mesh convergence studies in which smaller and smaller errors are targeted. The technique of Manufactured Solution makes it possible to find the overall convergence rate of the adaptive method for uniform refinement, isotropic adaptation and anisotropic adaptation. Also, a measure of how evenly the interpolation error is distributed on all the elements of the adapted mesh is presented and used to assess the performance of the overall adaptive process.

2. The Manufactured Solutions

An approach inspired from the technique of manufactured solutions is used, in which source terms are chosen such that it is possible to find the analytical solution to PDEs that engineers try to solve [23, 20]. This technique allows the design of numerical experiments that measure the convergence rate on a sequence of gradually finer meshes. By using the technique of manufactured solutions, it will be possible to make sure that the analytical solutions used in the present investigation are pertinent to engineering applications.

[†]The adaptive library **OORT** is used to adapt the meshes

Once a manufactured solution is chosen, the value of the analytical solution is evaluated at the vertices of the meshes in order to obtain a piecewise linear continuous interpolation of the manufactured solution. Using this interpolation instead of the result of the equation solver makes it possible to remove any error due to the equation solver. Replacing the equation solver by an interpolation does not make the study less pertinent, at least for Finite Element Methods (FEM). Indeed, Cea's lemma [24] states that the approximation error due to the equation solver is bounded by the error due to the interpolation error. Therefore, if the current studies show that the interpolation error can be controlled, then it will be possible to conclude that the approximation error would also be controlled.

Since the focus is on a methodology that can verify the adaptive process, only simple smooth geometries will be considered initially. Similarly, only continuous and infinitely differentiable solutions are initially considered since it is beyond the scope of this paper to introduce the mathematical tools required for the convergence analysis of solutions that include discontinuities.

The chosen problem models phenomenons that generate highly anisotropic solutions near the boundaries of the domain like those happening in the viscous layer of fluid flows. The problem is considered in two and three dimensions. The domain Ω for this problem is the unit square $[0, 1] \times [0, 1]$ in two dimensions and the unit cube $[0, 1] \times [0, 1] \times [0, 1]$ in three dimensions. This problem, as defined by Apel et al. [25], is a reaction-diffusion equation given by

$$\begin{cases} -\Delta u + k^2 u = 0 & \text{in } \Omega \\ u = g & \text{on } \partial\Omega, \end{cases} \quad (1)$$

where the Dirichlet boundary condition g is defined such that the analytical solution is given by

$$u = \begin{cases} e^{-kx} + e^{-ky} & \text{in 2D,} \\ e^{-kx} + e^{-ky} + e^{-kz} & \text{in 3D.} \end{cases} \quad (2)$$

As shown on Fig. 1, the solutions feature highly anisotropic boundary layers for large values of k . The parameter k is chosen to be $k = 10$ or $k = 100$ in the numerical experiments in order to study the impact of anisotropy on the overall adaptive method. Note also that, by proportional transformation, the case $k = 100$ on a unit square is the same as the case $k = 10$ but on a 10×10 square.

3. Hessian Recovery Convergence

The adaptive process aims to control approximation error bounded by the interpolation error in FEM. Following [26, 27, 28], the Hessian serves as an estimate of the anisotropic interpolation error.

In practice, the exact solution u is not known, and neither are its second order derivatives. Hence, the Hessian needs to be approximated. It is therefore necessary to verify that the recovered Hessian converges towards the exact Hessian provided by the manufactured solution method.

The techniques and measures to verify the Hessian recovery are documented in [21] along with an overview of various possible Hessian recovery schemes. The recovery method referred to as QF or QF2 recovery method in [21] is extended here to 3D and studied when applied to

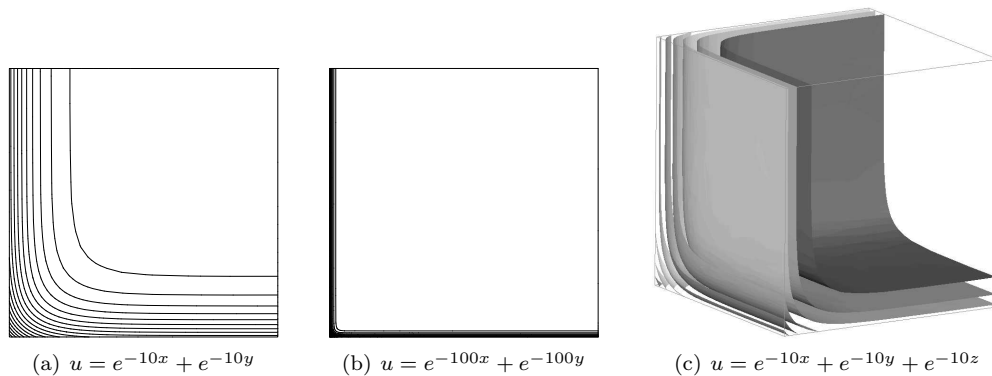


Figure 1. Isocontours of the solution of the reaction-diffusion test cases.

three types of unstructured meshes: uniformly refined, isotropically adapted and anisotropically adapted.

The QF (quadratic fitting) Hessian recovery method consists in locally fitting a paraboloid through the vertices surrounding a vertex P of interest. The set of vertices used for the recovery is a patch of two rings of topological neighbors. For a vertex that belongs to the boundary, the patch may comprise more rings of neighboring vertices, such that the patch contains at least six vertices in 2D and ten in 3D.

The original function is then sampled on the set of vertices and a local approximation of the function is computed using the quadratic form

$$q(x, y, z) = a_1 + a_2x + a_3y + a_4z + a_5xy + a_6yz + a_7xz + a_8x^2 + a_9y^2 + a_{10}z^2.$$

The coefficients a_i are those minimizing a distance between the function graph and the sampling points. Least squares fitting proceeds by minimizing the mean square deviation of the paraboloid from the set of sampling points.

The recovered Hessian is obtained by differentiating twice the paraboloid according to vertex position. Finally, the Hessian tensor assigned to the vertex P is

$$H_h(P) = \begin{pmatrix} 2a_8 & a_5 & a_7 \\ a_5 & 2a_9 & a_6 \\ a_7 & a_6 & 2a_{10} \end{pmatrix}$$

In order to assess its convergence behavior, the numerical Hessian is computed on a sequence of refined meshes and compared to the analytical Hessian computed from the analytical solution. The meshes are of Delaunay type with prescribed mesh size targets. In a first series, meshes have a uniform size; in a second series there are isotropic adapted meshes, i.e. mesh size is adapted to the solution; in a third series, anisotropic meshes are adapted, i.e. mesh size and elongation follow derivatives of the solution. See figures 7(a)–7(c), 10, 11 and 13.

The discrepancy between H and H_h is measured using the discrete L^1 -norm (average of nodal absolute values) of the maximum absolute column sum norm of the difference $H - H_h$,

as described in [21].

$$\|H - H_h\|_1 = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \left(\max_{j=1,\dots,d} \sum_{k=1}^d |H^{jk}(X_i) - H_h^{jk}(X_i)| \right) \quad (3)$$

with $d = 2$ or 3 space dimensions, N is the number of nodes, and X_i are the node positions. The norms will be measured either on the whole mesh or using only boundary vertices, in order to measure the error on the boundary. This norm is preferred to the discrete L^2 -norm of the spectral matrix norm because it is easier to compute and the graphs look very similar.

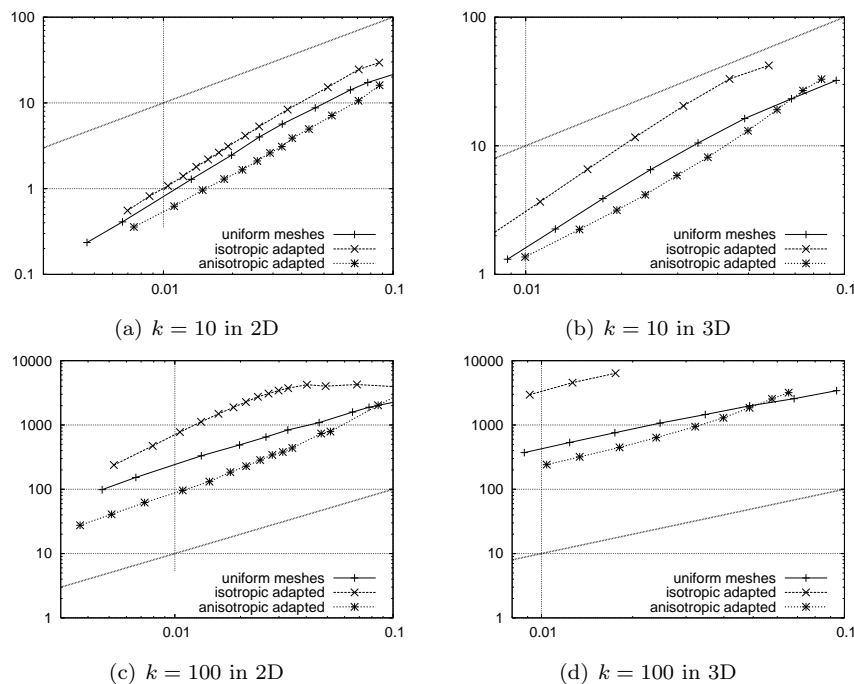


Figure 2. Convergence of recovered Hessian on three mesh types for the reaction-diffusion equation.

Figure 2 shows the Hessian recovery convergence towards the analytical Hessian of the solution (Eq. (2)) when the mesh is refined, for the three mesh types. A straight line with a slope of 1 has been added to each graph. It has been shown in [21] that the convergence of the Hessian recovery is quadratic far from the boundary and linear close to it. For functions having large second order derivatives close to the boundary, as are the test functions (2), a slope of 1 on graphs is expected, showing a linear convergence of the numerical Hessian H_h towards the analytical one H because the error is dominated by the error on the boundary. This is clearly obtained for the stiffer problem with $k = 100$, as shown on Fig 2c-d. The convergence rate is slightly higher with $k = 10$, Fig 2a-b, influenced by the quadratic rate inside the domain.

In figure 2, the Hessian error is slightly lower for anisotropic adapted meshes than for uniform meshes, because adapted meshes are finer near the boundary for an equivalent number of nodes. Although the recovered Hessian converges at the same rate for isotropic adapted meshes, the

fact that it has higher error values than for either uniform or anisotropic meshes might seem surprising. However, this can be explained by irregular valence of nodes and unbalanced patches used for the local fitting.

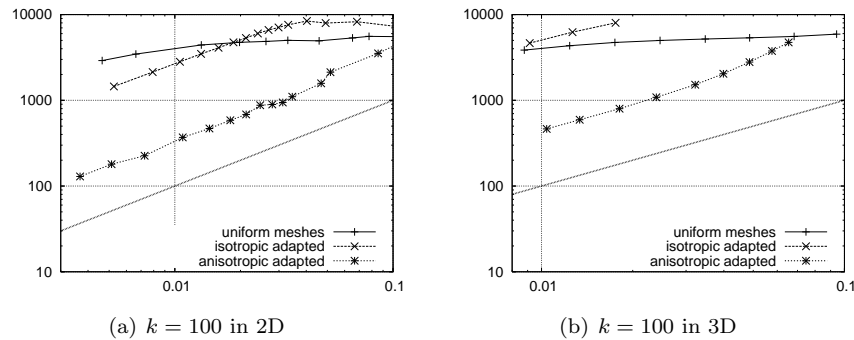


Figure 3. Convergence on boundary nodes of recovered Hessian on three mesh types.

Figure 3 highlights the Hessian convergence expressed using the discrete L^1 norm of $\|H - H_h\|$ on the boundary of the domain for the stiffer test function. Anisotropic meshes exhibit the predicted linear behavior on the boundary. Isotropic adapted meshes also obtain the same convergence rate except when the meshes become too coarse. However, uniform meshes seem to stay on a plateau for the tested size range, until the mesh becomes sufficiently fine to represent the solution adequately.

These results extend results obtained in [21] and establish that the Hessian recovery used has a convergence rate predicted by theory on all types of meshes considered. The Hessian recovery is thus verified by using the technique of Manufactured Solution and by performing convergence studies.

4. Size Specification Map

The size specification map is the data set driving the remeshing step. It specifies the local size and stretching of elements. For mesh adaptation, it is computed from an error estimate. In this study, three mesh families are generated using the same mesh techniques, but with various size specification maps.

4.1. Uniform meshes

In 3D, uniformly refined meshes cannot be obtained simply by splitting a tetrahedron into sub-tetrahedra through edge bisection, like in two dimensions. Using such a bisection results in a mesh that is not a uniform refinement of the coarse mesh since refined elements are not homomorphic to the original elements. Rather, uniform meshes are produced through local adaptation using the techniques presented in section 5 with uniform isotropic targets.

4.2. Anisotropic meshes

The anisotropic size specification map is generated from the recovered Hessian presented in the previous section. The analysis of D'Azevedo and Simpson [29] shows that the best simplex to generate for a given Hessian $H(x_0)$ is the equilateral simplex in the tensor metric $\mathcal{M} = \tilde{H}(x_0)$, which is the symmetric positive definite matrix obtained by taking the absolute value of the eigenvalues of $H(x_0)$. By doing so, \mathcal{M} can be considered as a metric tensor used to compute the length of an edge in this Riemannian space.

Alauzet et al. [30] also convert the Hessian into a Riemannian space, using the Hessian eigenvectors as metric principal directions. The metric eigenvalues are some power of the absolute value of Hessian eigenvalues, according to which norm of the error model is to be minimized. Our size map is the one that has the more stretched and varying sizes, showed to minimize the error model in L^∞ norm.

Since the Riemannian space is built from the error estimator, the length in this metric space can be seen as the quantity of error along an edge. The Euclidean length $l_E(AB)$ of an edge between vertices $A = (x_A, y_A)$ and $B = (x_B, y_B)$ is given by

$$\begin{aligned} l_E^2(AB) &= (B - A)^T (B - A) \\ &= (x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2. \end{aligned} \quad (4)$$

Using the metric \mathcal{M} , the metric length $l_{\mathcal{M}}(AB)$ of an edge between vertices A and B is given by

$$\begin{aligned} l_{\mathcal{M}}^2(AB) &= (B - A)^T \mathcal{M} (B - A) \\ &= \mathcal{M}_{11}(x_B - x_A)^2 + 2\mathcal{M}_{12}(x_B - x_A)(y_B - y_A) + \mathcal{M}_{22}(y_B - y_A)^2. \end{aligned} \quad (5)$$

Generally, the metric \mathcal{M} is not constant over the edge AB and the metric length $l_{\mathcal{M}}(AB)$ must be evaluated through a quadrature.

4.3. Isotropic meshes

Isotropic meshes are generated by the same remeshing method with an isotropic metric. The length $l_{\mathcal{M}}(AB)$ doesn't depend on the edge orientation when $\mathcal{M}_{12} = 0$ and $\mathcal{M}_{11} = \mathcal{M}_{22}$. It means the metric tensor is everywhere the identity matrix up to a coefficient. This coefficient specifies the local mesh size. It is chosen to be the smallest size specified by the anisotropic metric.

5. Adapted Mesh Convergence

The goal of a remeshing tool is to produce a mesh with elements as close as possible to the target provided by a size specification map. This can be measured using the non-conformity coefficient $\mathcal{E}_{\mathcal{T}}$ defined in [22]. The anisotropic mesh adapter used in this study implements a fixed order iterative adaptation algorithm that performs a series of local mesh alterations outlined below. The non-conformity coefficient is used to quantify its convergence, i.e. its ability to produce meshes that fit more and more the size specification map.

5.1. Non-conformity coefficient

To measure the quality of an adapted mesh, defined as its accuracy to conform to the input size specification map given through a metric, Labbé *et al.* [22] suggest that the “residual” of a mesh is the non-conformity coefficient of a mesh $\mathcal{E}_{\mathcal{T}}$.

An element non-conformity coefficient is first defined using:

$$\mathcal{E}_K = \|R_t\| = \sqrt{\text{tr}(R_t^T R_t)} \quad \text{with} \quad R_t = \overline{\mathcal{M}}_S^{-1} \mathcal{M}_K + \mathcal{M}_K^{-1} \overline{\mathcal{M}}_S - 2I, \quad (6)$$

where $\overline{\mathcal{M}}_S$ is the average of the size specification map on K and \mathcal{M}_K is the metric that transforms element K into a unit equilateral element. The *non-conformity coefficient of a mesh* $\mathcal{E}_{\mathcal{T}}$ is then defined as:

$$\mathcal{E}_{\mathcal{T}} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \mathcal{E}_{K_i}, \quad (7)$$

which is the average value of the non-conformity coefficient of the N simplexes of the mesh.

The non-conformity coefficient monitors the mesh adapter convergence just like a residual in a FEM solver monitors the convergence of the approximated solution towards the continuous one.

5.2. Remeshing algorithm

The mesh modification operations used to adapt a mesh have been implemented as a complex heuristic that involve several local modifications that are invoked in a fixed sequence. Inputs to the mesh adapter include a BRep Solid Model, a mesh that discretizes this geometric model and a size specification map obtained as discussed in section 3. The output of the mesh adapter is an adapted mesh, which is a discretization of the geometric model, that fits as closely as possible the input size specification map.

A geometric model is necessary to adapt the mesh on the boundaries. If the geometric model is not known by the mesh adaptation process, then it is not possible to move vertices on the boundaries, to refine the mesh on the boundaries, to preserve boundary features like edges between faces of the geometric model, etc. Without the geometric model, the mesh adaptation process will be limited in its capacity to build an adapted mesh and usually, many features happen in the vicinity of boundaries, which can not be accurately resolved in the absence of the BRep.

The adaptation algorithm modifies the input mesh instead of generating a mesh from scratch. Indeed, the process to build a mesh that fits as closely as possible a size specification map is an iterative process. In general, the mesh adaptation is used in a loop with a solver in a process to converge an accurate solution on a well adapted mesh. Generating a new mesh at each iteration instead of modifying the existing mesh appears to be a costly process which does not allow the possibility of doing a few surgical changes to the previous mesh, and eventually to not change the mesh at all when the global mesh-solver loop has converged. Mesh adaptation is therefore performed by mesh modification.

To achieve the goal of building the mesh that fits as closely as possible the size specification map, a mesh adaptation procedure should be able to modify all degrees of freedom of a mesh. The degrees of freedom of a mesh are the number and location of vertices and the connectivity between these vertices. The number of vertices is changed with mesh refinement and mesh

coarsening, the location of these vertices is changed with a moving vertex scheme and the connectivity between these vertices is changed with edge and face swapping. All those mesh modifications are performed locally.

The local modifications to the mesh must be combined in a way that guarantees convergence of the adaptation process. Mesh refinement and coarsening allow the change in mesh density to fit adequately the specified mesh size as prescribed in the input metric. Mesh refinement and coarsening increase the conformity of the mesh in size, but may decrease its topological regularity. In two dimensions, for example, a vertex is surrounded by an average of six edges. Refinement with the addition of a vertex in the middle of an edge will create a vertex with only four surrounding edges. Edge coarsening with vertex collapsing usually creates a vertex with eight surrounding edges. So, edge refinement will create an under-connected vertex and edge coarsening will create an over-connected vertex. The same problem happens in three dimensions.

To regularize the mesh topology after edge refinement or edge coarsening, a combination of face swapping and edge swapping is applied. This swapping step implements the well-known Lawson method [31] leading to a constrained Delaunay mesh in two dimensions. It acts as a connectivity regularizer, or a mesh topology smoother.

Topological mesh modifications (mesh refinement, mesh coarsening and connectivity smoothing) introduce huge changes compared to vertex relocation. New vertices are created at places which may not be their optimal location. The vertex locations are smoothed with the vertex relocation scheme, also named a mesh geometry smoother, that changes only the vertex coordinates to smooth the edge lengths of the mesh. So, the vertex relocation scheme is applied after each set of topological modifications to the mesh. The overall algorithm is to apply some iterations of this sequence of local mesh modifications:

1. Loop over the edges to perform edge refinement.
 - (a) After each refinement, apply local topological smoothing.
 - (b) After topological smoothing, apply local geometric smoothing.
2. Loop over the edges to perform edge coarsening.
 - (a) After each coarsening, apply local topological smoothing.
 - (b) After topological smoothing, apply local geometric smoothing.
3. Few loops over all the edges to perform topological smoothing.
4. Few loops over all the vertices to perform geometric smoothing.

This algorithm was shown to converge in a few iterations [32]. There are two stopping criteria, a maximum number of iterations and a tolerance criterion.

5.3. Convergence study

The reaction-diffusion test case of Eq. (2) with $k = 10$ is used to verify the convergence of the adaptation process. An anisotropic Riemannian metric field is built using the techniques presented in Sec. 3. This metric field is represented on the Fig. 4 by ellipses on a coarse regular mesh. Circles on the bottom left to top right diagonal of the domain indicate that equilateral simplex shapes are sought for those elements. The target shape stretches when moving away from this diagonal.

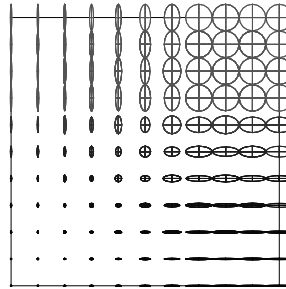


Figure 4. Anisotropic size specification map for the verification of mesher convergence. The target size is proportional to the ellipse's diameter in every direction, with a factor 0.29.

The conformity to this metric is measured during mesh adaptation using the local and global non-conformity coefficients \mathcal{E}_K and \mathcal{E}_T (Eqs. (6) (7)).

Figure 5 shows the convergence of the global non-conformity coefficient \mathcal{E}_T as a function of adaptation step number (refinement, coarsening, vertex relocation and diagonal swapping) for the adaptation of the mesh shown in Fig. 6(a) towards the mesh shown in Fig. 6(b). The non-conformity coefficient \mathcal{E}_T starts at 79.51 (see table I), increases significantly in the first steps of adaptation, drops sharply around the 10th step and converges towards 0.25. Detecting this sharp drop and stabilization of the non-conformity coefficient provides a quantitative mean of detecting the convergence of the coupled fixed-point resolution-adaptation process.

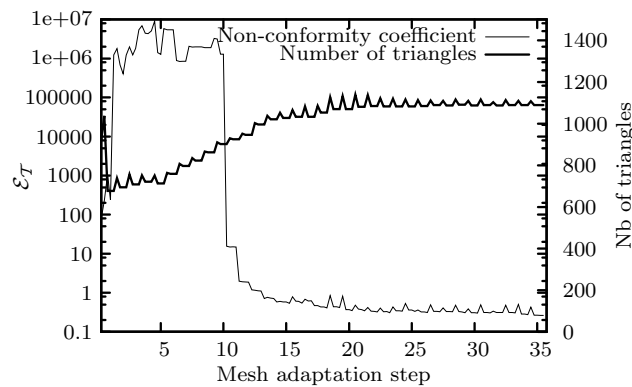


Figure 5. Reduction of \mathcal{E}_T (light line) and stabilization in number of mesh elements number (heavy line) during the mesh adaptation process resulting in the anisotropic mesh of Fig.6.

The non-conformity coefficient of a triangle \mathcal{E}_K is a measure sensitive to discrepancy in size, in shape and in orientation between an existing triangle and the target triangle specified through a Riemannian metric. In Fig. 6, the grey level of each triangle represents the log of \mathcal{E}_K over the triangle. Light grey indicates a low value of \mathcal{E}_K and dark grey indicates a high value of \mathcal{E}_K . Minimum and maximum differ on each mesh and are chosen to show the behavior

of \mathcal{E}_K . It is noticeable in Fig. 6(b) that \mathcal{E}_K is approximately equidistributed. The extrema of \mathcal{E}_K and the mean value $\mathcal{E}_{\mathcal{T}}$ are shown on table I.

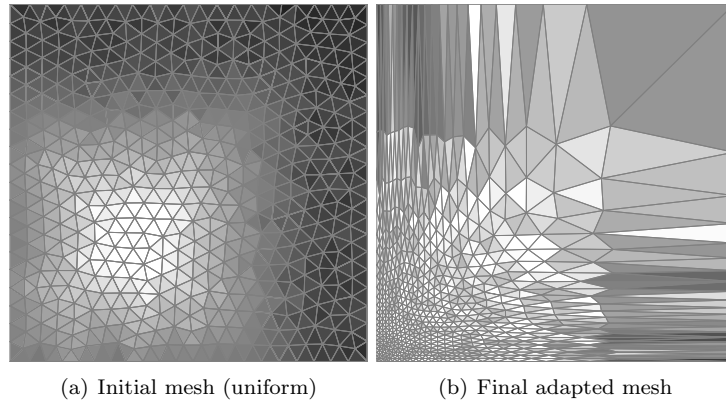


Figure 6. The non-conformity coefficient \mathcal{E}_K of a simplex with respect to the input specified Riemannian metric shown in Fig. 4.

Table I. Non-conformity coefficient measuring the fit of the meshes with the anisotropic size specification map.

Mesh type	$\min \mathcal{E}_K$	$\max \mathcal{E}_K$	$\mathcal{E}_{\mathcal{T}}$
Initial mesh	0.0167	407.3	79.51
Final adapted mesh	0.0023	15.95	0.2633

The non-conformity coefficient of a whole triangulation $\mathcal{E}_{\mathcal{T}}$ is a good measure of how close the mesh is to the target mesh specified through the input Riemannian metric. In general, the optimal mesh, such that $\mathcal{E}_{\mathcal{T}}$ vanishes, does not exist due to mesh constraints. As an example, a square can not be filled only with regular triangles. For 3D meshes it is even worse, as an edge can not be surrounded only by equilateral tetrahedra. So, we can only stipulate that the mesh adaptation algorithm converges up to a locally optimal mesh. Results show that the adaptation algorithm is convergent according to this measure. This verification also provides a mean to compare mesh adaptation algorithms among them. For a given manufactured solution and an initial mesh, the non-conformity coefficient allows to compare the quality of the meshes produced and the efficiency of each algorithm in obtaining an optimal mesh.

6. Interpolation Error Convergence

The convergence of the recovered Hessian up to the solution Hessian is studied in section 3 on numerical experiments. In section 5 the convergence of **OORT** is studied in a process that builds a mesh that fits as closely as possible the input Hessian expressed as a Riemannian metric.

The aim of this section is to verify the effectiveness of the adaptive process to control the interpolation error by distributing equally the interpolation error over all the elements of the mesh. Mesh convergence studies are used to compare the behavior of the adaptive process to the expected theoretical convergence rate by targeting smaller and smaller error for both the isotropic and the anisotropic mesh adaptation procedures. These two procedures are compared to uniform refinement.

The interpolation error is a measure of the discrepancy between a given function and its interpolate on a mesh. This error decreases with the mesh size h , as the interpolate converges to the exact function. The convergence rate α is a characteristic of the decay

$$\|u - \Pi_h u\| \leq Ch^\alpha \|u\| \quad (8)$$

for some appropriate norm. The *a priori* convergence rate of the interpolation error is 2 in the case of piecewise linear interpolation, assuming a smooth continuous function and a regular non-degenerating family of meshes. More specifically

$$\|u - \Pi_h u\|_{L^2(\Omega)} \leq Ch^2 |u|_{H^2(\Omega)} \quad (9)$$

where the H^2 semi norm is the Frobenius norm of the Hessian. The characteristic length h of a mesh is computed as follows:

$$h = \begin{cases} (A_\Omega/N)^{1/2} & \text{in 2D,} \\ (V_\Omega/N)^{1/3} & \text{in 3D,} \end{cases} \quad (10)$$

where A_Ω denotes the area of the computational domain Ω , V_Ω its volume and N is the number of elements. The L^2 -norm over the domain Ω of the interpolation error between the exact solution u and its piecewise linear interpolate $\Pi_h u$ is defined as

$$\|u - \Pi_h u\|_{L^2(\Omega)} = \left(\int_\Omega (u - \Pi_h u)^2 d\Omega \right)^{1/2}. \quad (11)$$

As the domain Ω is divided into a mesh T_h composed of elements $K \in T_h$, the previous integral over the domain Ω can be split into a sum of the integrals over the elements as

$$\|u - \Pi_h u\|_{L^2(\Omega)} = \left(\sum_{K \in T_h} \int_K (u - \Pi_h u)^2 dK \right)^{1/2} = \left(\sum_{K \in T_h} \|u - \Pi_h u\|_{L^2(K)}^2 \right)^{1/2}. \quad (12)$$

Here, $\|u - \Pi_h u\|_{L^2(K)}$ is the L^2 -norm of the interpolation error over element K . This integral is approximated numerically using a Gaussian integration rule with 12 points in two dimensions and 16 points in three dimensions.

The L^∞ -norm over the domain Ω of the interpolation error between the exact solution u and its piecewise linear interpolate $\Pi_h u$ is defined as

$$\|u - \Pi_h u\|_{L^\infty(\Omega)} = \max_{x \in \Omega} |u - \Pi_h u| = \max_{K \in T_h} \left(\max_{x \in K} |u - \Pi_h u| \right) = \max_{K \in T_h} \|u - \Pi_h u\|_{L^\infty(K)}. \quad (13)$$

Here again, the L^∞ -norm of the interpolation error over an element K , $\|u - \Pi_h u\|_{L^\infty(K)}$, which is the maximum of $|u - \Pi_h u|$ over all points x in element K , is approximated numerically using the same Gaussian points as for the L^2 norm. Note that even if the solution u is known

analytically, these L^2 and L^∞ norms are only approximated numerically. As the solution u is smooth and infinitely differentiable, the approximation of the norms should be accurate enough on fine meshes.

Finally, the set of all L^∞ -norms of the interpolation error over each element is assumed to be a normal distribution when all the elements of the mesh are considered. The equidistribution is therefore measured using the standard deviation of the element wise L^∞ -norm of the interpolation error on all elements of the mesh.

Results are presented both for the two- and three-dimensional versions of the reaction-diffusion problem described in Sec. 2, with values of $k = 10$ and 100.

6.1. Two-Dimensional Test Cases

A comparison of interpolation error convergence is first presented for two-dimensional test cases over uniform, isotropic and anisotropic adapted meshes of different sizes, from 41 vertices up to 37000 vertices. Figure 7 presents two-dimensional results for $k = 10$. Figure 7(a) to 7(c) show typical examples of the three mesh types used. Specific data about these three meshes are presented in Table II.

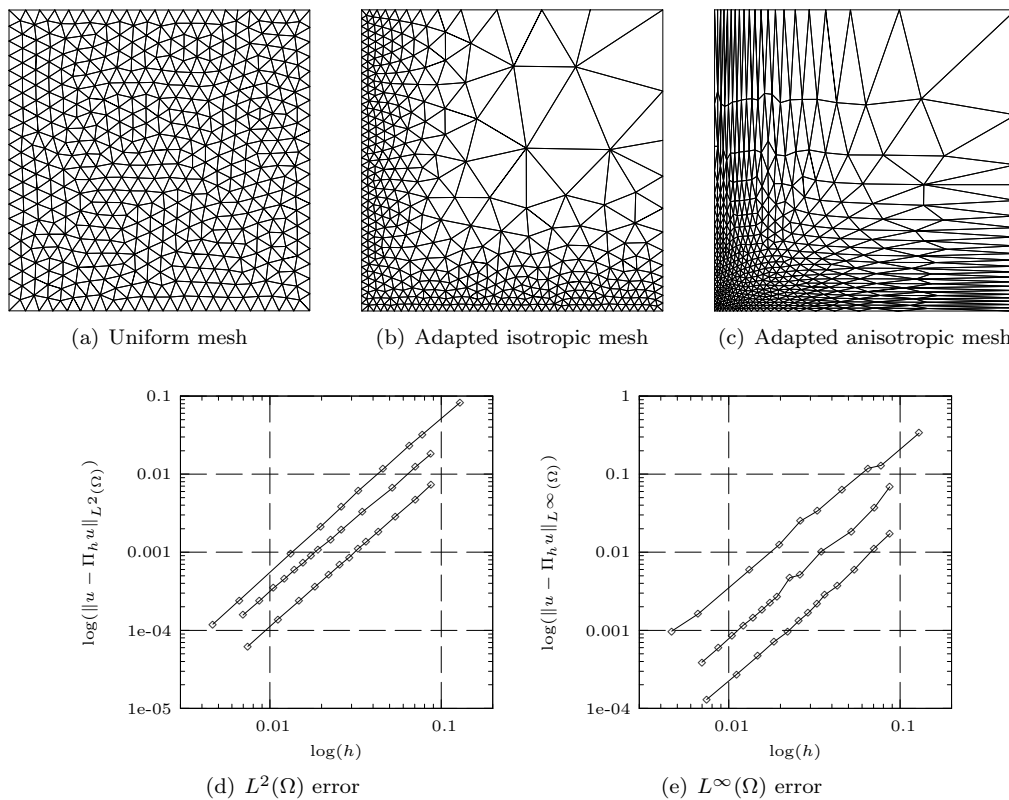


Figure 7. Reaction-diffusion test case with $k = 10$ in a unit square domain.

Table II. Data about the three meshes of Fig. 7.

Mesh type	Figure	Nb of Vertices	Nb of Triangles	$\ u - \Pi_h u\ _{L^2(\Omega)}$
Uniform mesh	7(a)	503	922	6.12e-03
Adapted isotropic	7(b)	466	828	3.30e-03
Adapted anisotropic	7(c)	508	930	1.11e-03

Anisotropic mesh adaptation reduces significantly the interpolation error over the whole domain in L^2 and L^∞ norms as can be seen in Figures 7(d) and 7(e). In these two figures, the top curve corresponds to uniform meshes, the middle curve to adapted isotropic meshes, and the bottom curve to adapted anisotropic meshes. Figure 7(d) shows a plot of the log value of the L^2 -norm of the interpolation error over the domain as a function of the log value of h . As expected, interpolation error decreases quadratically with refinement for all types of meshes, but a significant gain in precision is observed for an equivalent number of elements for the anisotropic adapted meshes. This shows that the present adaptive method, which estimates the interpolation error through Hessian recovery and builds anisotropic meshes that equidistribute the estimated interpolation error, reduces significantly the interpolation error in L^2 -norm. Figure 7(e) shows a plot of the log value of the L^∞ -norm of the interpolation error over the domain as a function of the log value of h . As expected, interpolation error also decreases quadratically with refinement for all types of meshes.

Figure 8 shows histograms of the elementary interpolation error in L^∞ -norm for the finest uniform, isotropic and anisotropic meshes. These meshes have 46 336, 20 566 and 18 092 triangles respectively. To ease the comparison of these histograms, the y -axis is not the number of triangles, but the percentage of triangles. Because the elementary L^∞ -norm of the interpolation error is smaller on anisotropic meshes than on the other meshes, the x -axis is made dimensionless by dividing by the average. So, anisotropic meshes not only reduce the L^∞ -norm of the interpolation error over the triangles, but also equidistribute, i.e., reduce the dispersion of these values.

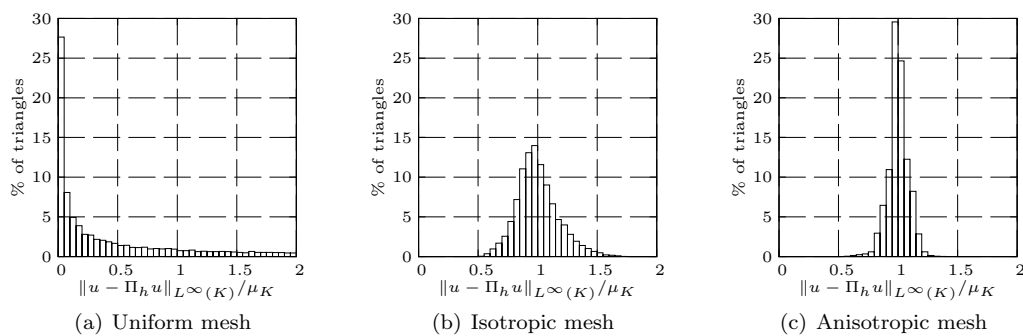
Figure 8. Histograms of the dimensionless infinity error over the triangles for the reaction-diffusion test case with $k = 10$ in a unit square domain.

Figure 9 shows the behavior of the standard deviation of the element-wise L^∞ -norm values as a function of the mesh size and of the three mesh types used. The standard deviation of the uniform refinement converges since the number of elements with small error increases faster than the number of elements with large error which yields a distribution that is far from normal. However, the behavior of the uniform refinement still serves as a reference for the other refinements. The behavior of the isotropic refinement shows a similar slope, but the meshes have a better overall equirepartition of the error than on the uniformly refined meshes. The behavior of anisotropic refinement shows that the equirepartition is even better and that the slope is stronger, suggesting that each new element is placed more appropriately than for uniform refinement or isotropic refinement. This gives a direct indication of the fact that the global mesh adaptation process equidistributes the interpolation error in L^∞ -norm over the elements.

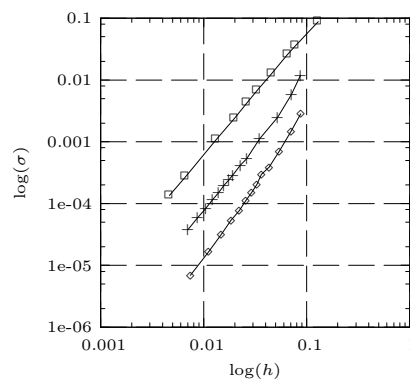


Figure 9. Standard deviation of reaction-diffusion test case with $k = 10$ in a unit square domain.

Figure 10 shows the same type of results as Fig. 7, but for the parameter $k = 100$. Figure 10(a) to 10(c) show typical examples of the three mesh types used. Specific data about these three meshes are presented in Table III. As illustrated in Figs. 10(d) and 10(e), the convergence of the interpolation error in L^2 and L^∞ norms on these meshes is very similar to the one presented for $k = 10$, and again quadratic ($\mathcal{O}(h^2)$) convergence is observed, in agreement with Eq. (9).

Table III. Data about the three meshes of Fig. 10.

Mesh type	Figure	Nb of Vertices	Nb of Triangles	$\ u - \Pi_h u\ _{L^2(\Omega)}$
Uniform mesh	10(a)	268	476	1.35e-01
Adapted isotropic	10(b)	268	415	2.73e-02
Adapted anisotropic	10(c)	260	456	9.52e-04

Adapted meshes become more profitable as the phenomenon that must be captured becomes more localized. In a similar way, anisotropic adaptation becomes more profitable as the

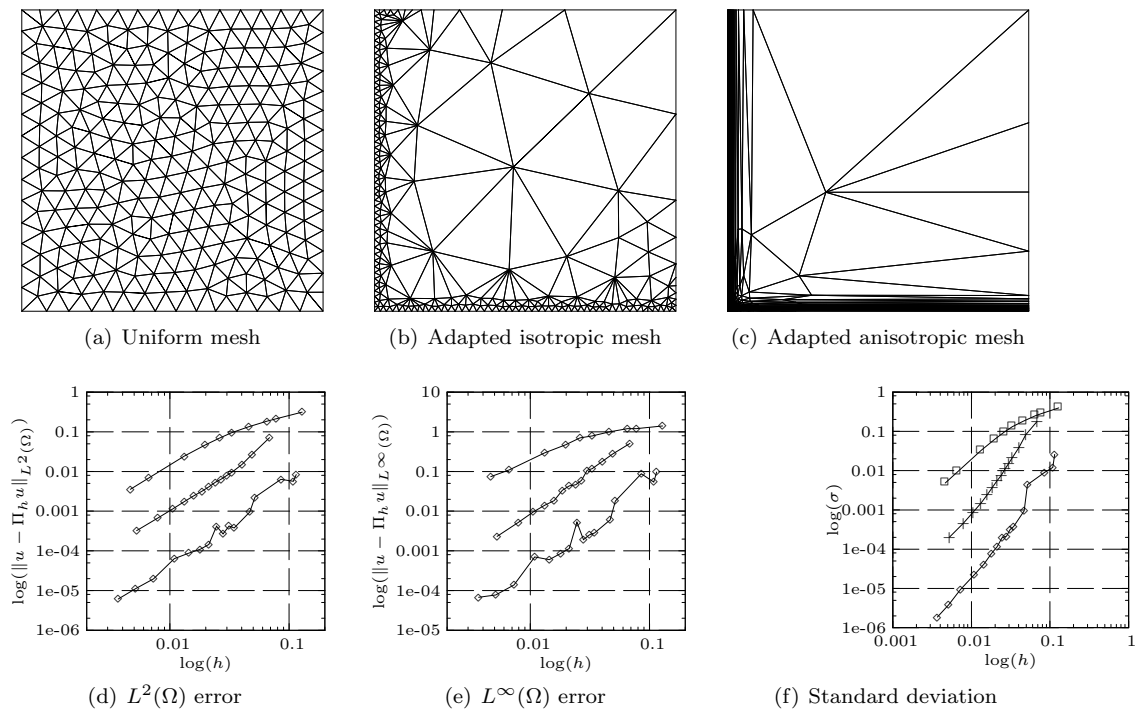


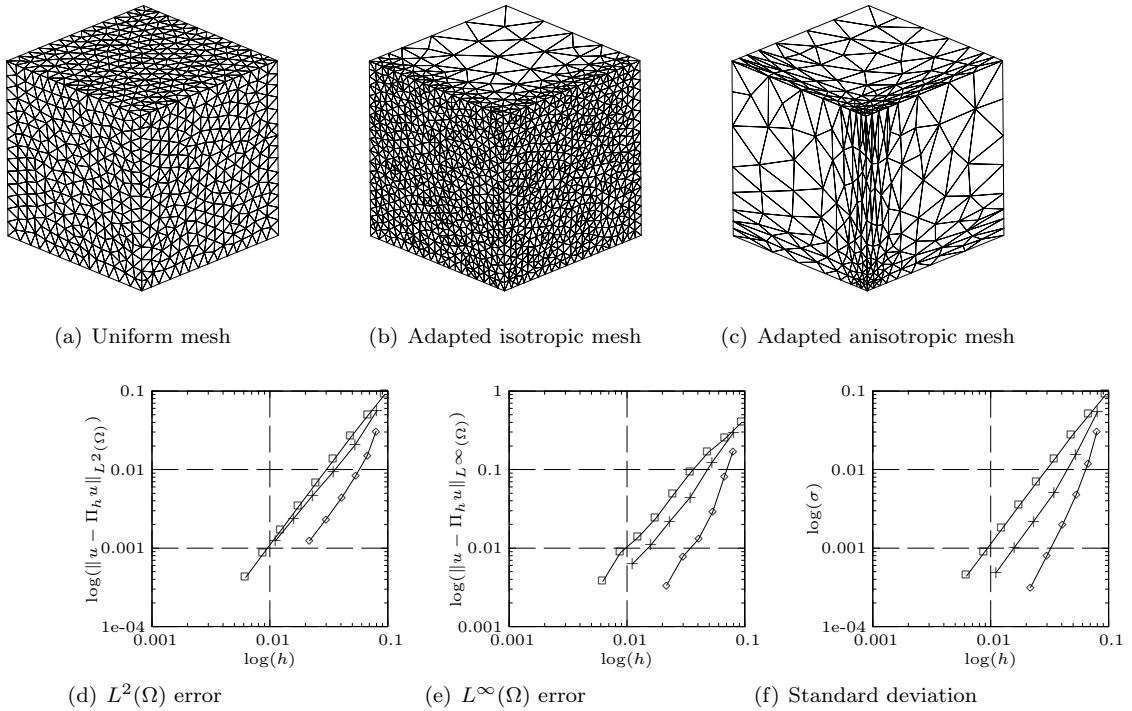
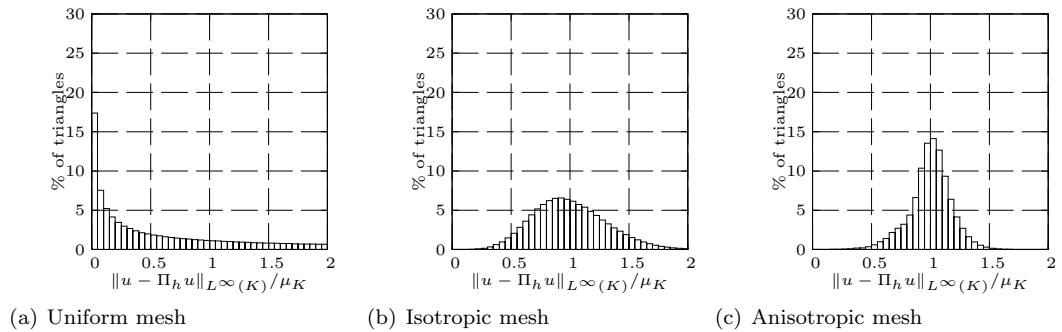
Figure 10. Reaction-diffusion test case with $k = 100$ in a unit square domain.

phenomena to capture becomes more anisotropic. For instance, to reach a level of L^2 -norm interpolation error in the order of 1×10^{-3} , around 450 elements are needed with an adapted anisotropic mesh, around 10 000 with an adapted isotropic one and approximately 175 000 with a uniform mesh. So clearly anisotropic mesh adaptation minimizes, or at least reduces significantly, the overall interpolation error by distributing equally the element-wise L^∞ norm of the interpolation error, as shown on Fig. 10(f).

6.2. Three-Dimensional Test Cases

A comparison of interpolation error convergence is presented for three-dimensional test cases over uniform, isotropic and anisotropic adapted meshes of different sizes, from 1 000 vertices up to 750 000 vertices. Figure 11 presents three-dimensional results for $k = 10$. Figure 11(a) to 11(c) show typical examples of the three mesh types used. Specific data about these three meshes are presented in Table IV.

Figures 11(d) and 11(e) present the convergence behavior of the interpolation error for the three mesh types in L^2 and L^∞ norms. As usual, the top curves are for uniform meshes, middle curves for isotropic adapted meshes and bottom curves for anisotropic adapted meshes. In all case, the convergence behaves quadratically as expected. There is no or few differences of the interpolation error in both norms, between the uniform meshes and the adapted isotropic adapted meshes. With adapted isotropic meshes, there are less vertices far from the boundary

Figure 11. Reaction-diffusion test case with $k = 10$ in a unit cube domain.Figure 12. Histograms of the dimensionless infinity error over the tetrahedra for the reaction-diffusion test case with $k = 10$ in a unit cube domain.

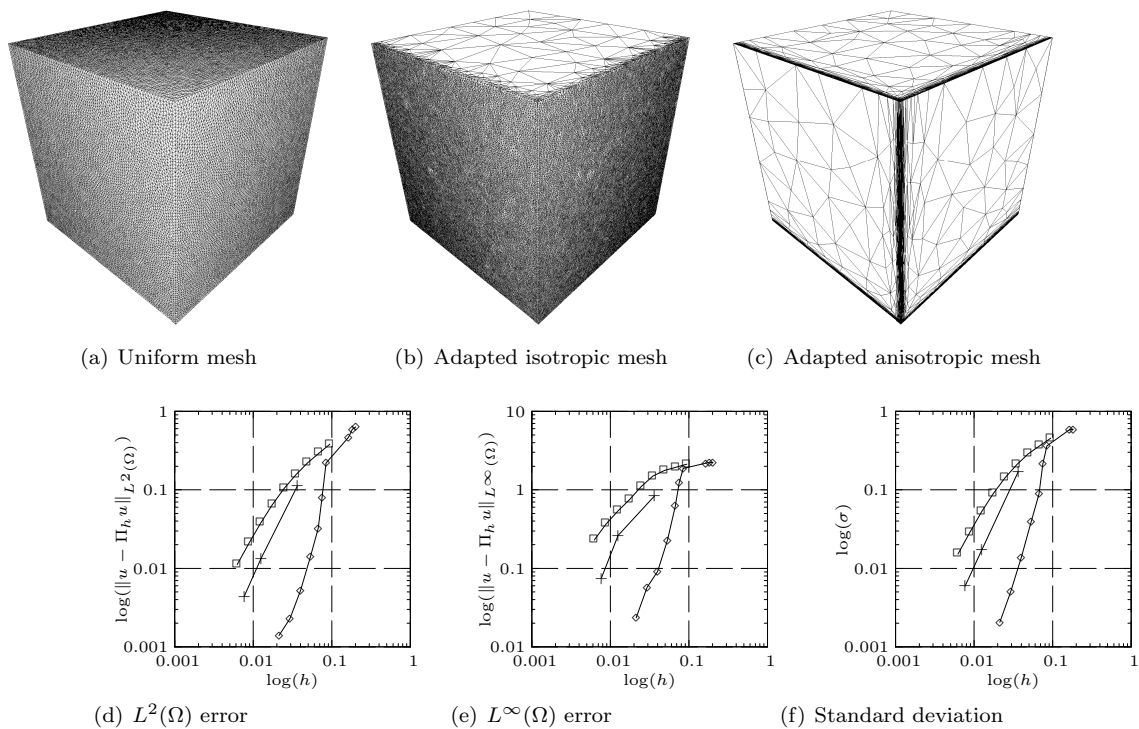
layers and more in the boundary layers, which is good. Because of isotropy requirement, those vertices added in the boundary layers are mainly added in a direction tangent to the wall, which is useless, and less are added perpendicular to the wall. The overall effect is that there is no or few gains in adapted isotropic meshes. Indeed, Figure 11(a) and Figure 11(c) have almost the same error. Figure 11(f) shows that the anisotropic mesh adaptation process is again better

Table IV. Data about the three meshes of Fig. 11.

Mesh type	Figure	Nb of Vert.	Nb of Tetra.	$\ u - \Pi_h u\ _{L^2(\Omega)}$
Uniform mesh	11(a)	4 761	23 881	1.02e-2
Adapted isotropic	11(b)	4 726	21 569	1.02e-2
Adapted anisotropic	11(c)	1 231	5 606	9.90e-3

at distributing evenly the interpolation error over all the elements of the mesh. Figures 12(a) to 12(c) present the distribution of the element-wise L^∞ norm of the interpolation error over all the elements of the meshes.

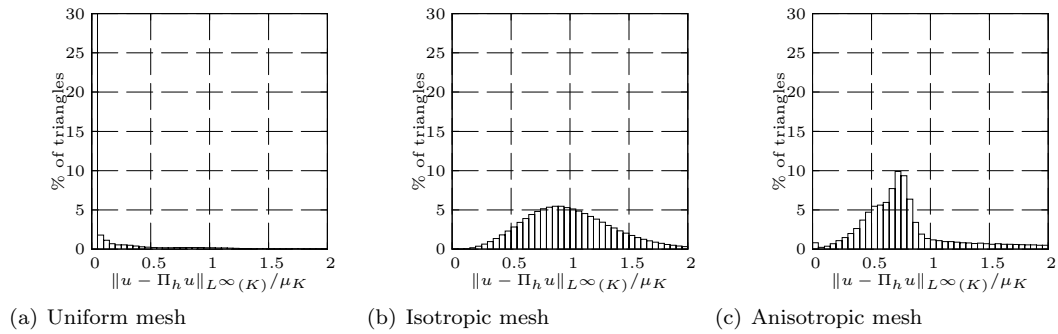
Figure 13 shows the same type of results as Fig. 11, but for the parameter $k = 100$. Figure 13(a) shows a uniformly fine mesh, figure 13(b) shows an isotropic mesh and figure 13(c) shows an anisotropic coarse mesh. All three meshes are nearly equivalent in terms of accuracy. Indeed, the uniform mesh with 700 000 points, the isotropic mesh with 100 000 points and the anisotropic mesh with less than 1 500 points have nearly the same interpolation error L^2 norm as shown in Table V.

Figure 13. Reaction-diffusion test case with $k = 100$ in a unit cube domain.

For an equivalent number of elements the interpolation error can be reduced by two orders

Table V. Data about the three meshes of Fig. 13.

Mesh type	Figure	Nb of Vert.	Nb of Tetra.	$\ u - \Pi_h u\ _{L^2(\Omega)}$
Uniform mesh	13(a)	733 697	4 178 360	9.01e-3
Adapted isotropic	13(b)	116 682	515 676	1.33e-2
Adapted anisotropic	13(c)	1 440	6 696	1.39e-2

Figure 14. Histograms of the dimensionless infinity error over the tetrahedra for the reaction-diffusion test case with $k = 100$ in a unit cube domain.

of magnitude. In the specific context of the present test case, to reach an equivalent error level of 0.01, the mean mesh size can be increased by 8 using anisotropic adaptation compared to uniform refinement, i.e. approximately 500 times (8^3) more elements are needed in a uniform mesh compared to an anisotropic mesh with an equivalent error level. In the case of Figs. 13(a), 13(b) and 13(c) which have about the same error, this means about 600 times less elements. Nevertheless, the three graphs tends towards a slope of 2 as predicted.

In figure 13(d), figure 13(e) and figure 13(f), only three isotropic meshes have been generated due to the difficulty of obtaining quality meshes in the presence of very steep gradients. Figure 13(f) shows that the anisotropic remesher still has a stronger slope and therefore is better suited to equidistribute the interpolation error. However, figure 14(c) shows that the error distribution on the finest anisotropic mesh is not uniform, indicating that for this very difficult test case, the adaptation algorithm cannot achieve perfect error equidistribution. One explanation for this might be the fact that extremely large elements would be required in regions where the solution is essentially constant, which cannot be constructed because of the physical limits of the computational domain.

This last example demonstrates how the proposed verification methodology can help identify limits in an adaptation process, and provide the tools to quantify proposed improvements.

The conclusions for two-dimensional numerical experiments again apply in three dimensions. Namely, anisotropic adaptation is very profitable when the phenomena to capture are anisotropic. Anisotropic adaptation can drastically decrease the number of degrees of freedom required to attain a desired precision.

Adapted anisotropic meshes show excellent properties in terms of precision for a given

cost, but this precision must be balanced against the cost of building these meshes, which involve advanced techniques, and constructibility constraints that must be incorporated into the remeshing tools.

7. Conclusion

An original approach for the assessment of the convergence rate of unstructured anisotropic adaptive methods, inspired from the method of manufactured solutions was proposed and applied to a fixed order mesh modification adaptive method although it could be applied to other adaptive methodologies. Manufactured solutions representative of flow features with strong gradient, like laminar boundary layers and viscous shock waves are used in order to extend the conclusions on adaptive meshes efficiency to those cases. This approach enabled the formulation of numerical experiments that showed, as expected, that the adaptive method allows the control of the interpolation error by equidistributing the interpolation error on each element of the mesh. Quadratic convergence is recovered in a mesh refinement study for both two- and three-dimensional sample problems. The anisotropic adaptation strategy outperforms the isotropic and the uniform strategy by an order of magnitude in some cases.

This study used the mesh non-conformity measure which proves to be an adequate practical tool to measure mesh adaptation and error equidistribution over the computational domain. The Hessian recovery was also verified to have proper convergence properties.

A few interesting remarks can be made on the performance of isotropic and anisotropic adaptive processes applied to the model problems. The isotropic meshes always performed better than uniform refinement on coarse meshes, but the distinction became less obvious for fine meshes due to the strong transition in size. The isotropic meshes also gave better results when the problem had stronger gradients, but the meshes were harder to produce. On the other hand, the anisotropic meshes were markedly better than both uniform and isotropic meshes. Coarse anisotropic meshes were shown to be as precise as fine uniform meshes. The anisotropic meshes also made good use of any additional elements added to the mesh, and the convergence rate was always quadratic or better.

The approach used here could be extended to study the performance, compare and eventually improve mesh adaptation algorithms. Now that it is proved that mesh adaptation algorithms converge, the speed and efficiency of mesh adaptation algorithms can be studied. Also, other studies should address problems posed by problems with non smooth geometries or non smooth solutions.

Acknowledgments

We gratefully acknowledge support of this work by GE Hydro and the National Science and Engineering Research Council of Canada (NSERC).

REFERENCES

1. Szabo BA, Babuska I. *Finite Element Analysis*. John Wiley & Sons, 1991.

2. Alauzet F, Frey PJ, George PL, Mohammadi B. 3D transient fixed point mesh adaptation for time-dependent problems: Application to CFD simulations. *Journal of Computational Physics* 2007; **222**(2):592–623. Doi: DOI: 10.1016/j.jcp.2006.08.012.
3. Li X, Shephard MS, Beall MW. 3D anisotropic mesh adaptation by mesh modification. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 2005; **194**(48–49):4915–4950. Doi: DOI: 10.1016/j.cma.2004.11.019.
4. George PL, Borouchaki H. *Delaunay Triangulation and Meshing. Applications to Finite Elements*. Hermès: Paris, 1998.
5. Frey PJ, George PL. *Mesh Generation. Application to Finite Elements*. Hermès: Paris, 2000.
6. Frey PJ. Anisotropic mesh adaptation for CFD computations. *Comp. Meth. in Appl. Mech. and Eng* 2005; **194**:5068–5082.
7. Kallinderis Y, Kavouklis C. A dynamic adaptation scheme for general 3-D hybrid meshes. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 2005; **194**(48–49):5019–5050. Doi: DOI: 10.1016/j.cma.2004.11.023.
8. Rivara MC, Levin C. A 3-D refinement algorithm suitable for adaptive and multi-grid techniques. *Communications in Applied Numerical Methods* 1992; **8**(5):281–290. 10.1002/cnm.1630080502.
9. Coupez T. Génération de maillage et adaptation de maillage par optimisation locale. *Revue euro. EF* Apr 2000; **9**(4):403–423.
10. Dompierre J, Vallet MG, Bourgault Y, Fortin M, Habashi WG. Anisotropic mesh adaptation: towards user-independent, mesh-independent and solver-independent CFD. Part III. Unstructured meshes. *International Journal for Numerical Methods in Fluids* 2002; **39**(8):675–702. 10.1002/fld.357.
11. Coupez T, Bigot E. 3d anisotropic mesh generation and adaptation with applications. Barcelona, 2000.
12. Pain CC, Umpleby AP, de Oliveira CRE, Goddard AJH. Tetrahedral mesh optimisation and adaptivity for steady-state and transient finite element calculations. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 2001; **190**(29–30):3771–3796. Doi: DOI: 10.1016/S0045-7825(00)00294-2.
13. Acikgoz N, Bottasso CL. Metric-driven mesh optimization using a local simulated annealing algorithm. *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 2007; **71**(2):201–223. 10.1002/nme.1904.
14. Bottasso CL. Anisotropic mesh adaption by metric-driven optimization. *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 2004; **60**(3):597–639. 10.1002/nme.977.
15. Habashi WG, Dompierre J, Bourgault Y, Ait-Ali-Yahia D, Fortin M, Vallet MG. Anisotropic mesh adaptation: towards user-independent, mesh-independent and solver-independent CFD. Part I: general principles. *International Journal for Numerical Methods in Fluids* 2000; **32**(6):725–744. 10.1002/(SICI)1097-0363(20000330)32:6<725::AID-FLD935>3.0.CO;2-4.
16. Hay A, Pelletier D. Code and solution verification of an adaptive finite element turbulent flow solver. *18th AIAA Computational Fluid Dynamics Conference*, AIAA: Miami, FL, USA, 2007.
17. Deng G, Queuey P, Visonneau M. A code verification exercise for the unstructured finite-volume CFD solver ISIS-CFD. *European Conference on Computational Fluid Dynamics*, P Wesseling EO, Periaux J (eds.), ECCOMAS CFD 2006, 2006; 17.
18. Ea L, Hoekstra M, Hay A, Pelletier D. On the construction of manufactured solutions for one and two-equation eddy-viscosity models. *International Journal for Numerical Methods in Fluids* 2007; **54**(2):119–154. 10.1002/fld.1387.
19. Pelletier D. Verification, validation and uncertainty in computational fluid dynamics. *International Symposium on Uncertainty in Hydraulic Modeling*, Montreal, QC, Canada, 2008.
20. Roache PJ. *Verification and Validation in Computational Science and Engineering*. Hermosa Publishers, Albuquerque, New Mexico, USA, 1998.
21. Vallet MG, Manole CM, Dompierre J, Dufour S, Guibault F. Numerical comparison of some Hessian recovery techniques. *Int. J. Numer. Methods Eng* Nov 2007; **72**(8):987–1007.
22. Labbé P, Dompierre J, Vallet MG, Guibault F, Trépanier JY. A universal measure of the conformity of a mesh with respect to an anisotropic metric field. *Int. J. Numer. Methods Eng* 2004; **61**:2675–2695.
23. Pelletier D, Roache PJ. CFD code verification and the method of manufactured solutions. *Proceedings of the 10th Annual Conference of the CFD Society of Canada*, 2002.
24. Ciarlet PG. *The finite element method for elliptic problems*. North-Holland Publishing Company, Amsterdam, 1978.
25. Apel T, Grosman S, Jimack P, Meyer A. A new methodology for anisotropic mesh refinement based upon error gradients. *Appl. Num. Math* 2004; **50**:329–341.
26. Vallet MG, Hecht F, Mantel B. Anisotropic control of mesh generation based upon a Voronoi type method. *Third International Conference on Numerical Grid Generation in Computational Fluid Dynamics and Related Fields*, Arcilla AS, Häuser J, Eiseman PR, Thompson JF (eds.), North-Holland: Barcelona, Spain, 1991; 93–103.
27. Fortin M, Vallet MG, Poirier D, Habashi WG. Error estimation and directionally adaptive meshing. *25th AIAA Fluid Dynamics Conference*, AIAA–94–2211, Colorado Springs, CO, 1994.
28. Frey PJ, Alauzet F. Anisotropic mesh adaptation for CFD computations. *Comp. Meth. in Appl. Mech.*

- and Eng* 2005; **194**(48–49):5068–5082.
29. D'Azevedo EF, Simpson RB. On optimal triangular meshes for minimizing the gradient error. *Numerische Mathematik* Jul 1991; **59**(4):321–348.
 30. Alauzet F, Loseille A, Dervieux A, Frey P. Multi-dimensional continuous metric for mesh adaptation. *Fifteenth International Meshing Roundtable*, Sandia National Laboratories: Birmingham, AL, 2006; 191–214.
 31. Lawson CL. Generation of a triangular grid with application to countour plotting. *Technical Report JPL-299*, California Institute of Technology 1972.
 32. Habashi WG, Dompierre J, Bourgault Y, Fortin M, Vallet MG. Certifiable computational fluid dynamics through mesh optimization. *AIAA J.* May 1998; **36**(5):703–711.